Lineárna algebra a geometria I. – prednáškové úlohy č. 15 a č. 16

Cvičenia 18. novembra 2015 - Lineárne zobrazenia, Matica zobrazenia

---

1. 4.1.17(1) Definujme $\frac{d}{dt} : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$ ako zobrazenie derivovania. Teda bude

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i\geq 0} a_i t^i\right) = \sum_{i\geq 1} i a_i t^{i-1}.$$

Presvedčte sa, že zobrazenie $\frac{d}{dt}$ je lineárne.

2. 4.1.17(2) Dokážte, že zobrazenie

$$h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \qquad h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_3 + x_4)$$

je lineárne.

3. 4.1.17(4) Nech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ je lineárne zobrazenie také, že $f(1,0,0) = (-1, \frac{1}{3}, 4, \sqrt{2})$, $f(0,1,0) = (0,0,0,0)$, $f(0,0,1) = (-\sqrt{5}, 5, -2, \frac{1}{6})$. Vyrátajte $f(1, \sqrt{2}, -2)$.

4. 4.1.17(6) Dokážte, že existuje jediné lineárne zobrazenie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ také, že

$$f(1, \sqrt{3}) = (1, -2, \sqrt{5}), \qquad f(\sqrt{2}, 3) = (1, 1, -1)$$

a vyrátajte $f(1, 1)$.

5. 4.2.4(1) Pre $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (2x - 3y, -x + 2y, 3x + 4y)$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (2x_1 - x_3, 3x_3, 2x_1 + x_2 - x_3)$, vyrátajte $M_{g\circ f}$.

6. 4.2.4(3) Nech $f : R^k \to R^s$, $g : R^k \to R^s$ sú lineárne zobrazenia. Súčet $f + g$ definujeme ako zobrazenie $f + g : R^k \to R^s$, $(f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$ pre všetky $\vec{x} \in R^k$, a α-násobok ($\alpha \in R$) zobrazenia f definujeme ako $\alpha f : R^k \to R^s$, $(\alpha f)(\vec{x}) = \alpha(f(\vec{x}))$ pre všetky $\vec{x} \in R^k$. Rozhodnite, či vždy
(a) $M_{f+g} = M_f + M_g$;
(b) $M_{\alpha f} = \alpha M_f$.

7. 4.2.4(4) Určte hodnosť matice každého z lineárnych zobrazení

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, & f(a, b, c) = (2a - 3b + c, a + b - 2c, 3a + b), \\ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, & g(a, b) = (2a - 3b, a + b, 3a + b), \\ h : (\mathbb{Z}_2)^3 \to (\mathbb{Z}_2)^3, & h(a, b, c) = (a + b, a + c, b + c). \end{array}$$

8. 4.2.4(7) Vyrátajte $f(1, 1, 1)$, ak viete, že lineárne zobrazenia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ má maticu

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. 4.3.8(1) Vyrátajte súčin AB, ak

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

chápeme ako
(a) matice nad $\mathbb{R}$;
(b) matice nad $\mathbb{Z}_2$.

10. 4.3.8(2) Nájdite všetky matice $X \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, pre ktoré $AX = XA$, ak

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$