

1. 4.5.6(2) Zistite, či je lineárnym izomorfizmom zobrazenie

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (2a - b + c, 3a + 5b - c, 5a + b + c).$$

2. 4.5.6(3) Nájdite všetky  $\epsilon \in \mathbb{R}$ , pre ktoré je zobrazenie  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  injektívne:

$$g(x, y, z) = (2x + y + z, -x + \epsilon y + 10z, \epsilon x - y - 6z, 5x + 2y + z).$$

3. 4.5.6(5) Nech  $A$  a  $B$  sú matice dvoch lineárnych izomorfizmov  $R^n \rightarrow R^n$ . Rozhodnite o pravdivosti výrokov

- (a)  $A + B$  je maticou lineárneho izomorfizmu;  
 (b)  $AB$  je maticou lineárneho izomorfizmu.

4. 4.5.6(8) Nech  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(a, b) = (2a - 3b, a + b, -2a + b)$ ,  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $g(a, b, c) = (2a - b + c, b - c, a + b - c)$ . Je zobrazenie  $g \circ f$  injektívne?

5. 4.6.11(3) Nech  $n \in \mathbb{N}$ . Nájdite inverznú maticu k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n \\ 0 & 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

6. 4.6.11(4) Pre každé  $n \in \mathbb{N}$  vyriešte maticovú rovnicu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

7. 4.6.11(8) Vyrátajte maticu  $B^{-1} \cdot A^{-1}$ , ak

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}).$$

9. 5.1.6(2) Presvedčte sa, že jedným z riešení reálneho lineárneho systému

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 6 \end{aligned}$$

je  $(1, 1, -1, -1) \in \mathbb{R}^4$ . S využitím 5.1.4 dokážte, že iné riešenia tento systém nemá.

10. 5.1.6(3) Aký je maticový zápis lineárneho systému

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= -5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 &= 7 \\ -2x_1 - x_3 + 4x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

nad  $\mathbb{R}$ ? Vyrátajte hodnotu matice, resp. rozšírenej matice tohto systému.

11. 5.2.8(2) Nájdiť bázu priestoru riešení reálneho lineárneho systému

$$4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0$$

$$4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0$$

$$3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0$$

$$2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0.$$

12. 5.2.8(3) Určte  $\beta$ , pre ktoré má reálny lineárny systém

$$3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0$$

$$\beta x_1 + 4x_2 + 10x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 3x_4 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0$$

jednorozmerný priestor všetkých riešení.