Lineárna algebra a geometria I. – prednáškové úlohy č. 22 a č. 23

Cvičenia 16. decembra 2015 - Determinanty

1. 6.2.20(1) Dokážte, že ak $A \in M_{n,n}(R)$ a $\delta \in R$, tak

$$\det(\delta \cdot A) = \delta^n \det(A).$$

2. 6.2.20(2) Nech $a_1, \ldots, a_n \in R$ $(n \geq 2)$. Vyrátajte

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

3. 6.2.20(5) Dokážte, že determinant reálnej matice typu $n \times n$

$$\begin{pmatrix} b & a & a & \ldots & a \\ a & b & a & \ldots & a \\ a & a & b & \ldots & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a & a & \ldots & a & b \end{pmatrix}$$

sa rovná $(b-a)^{n-1}(b+(n-1)a)$.

4. 6.2.20(10) Dokážte, že kososymetrická matica $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ je singulárna, ak n je nepárne.

5. 6.3.8(1) Pomocou determinantov nájdite inverznú k reálnej matici typu $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

6. 6.3.8(2) Pomocou Cramerových formúl vyriešte reálny lineárny systém

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 &= -8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= -8. \end{aligned}$$

7. 6.3.8(5) Vyriešte pomocou Cramerových formúl reálny lineárny systém $AX = B$, ak

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 2 \\ 3 & -7 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

8. 7.1.5(3) Spojité reálne funkcie definované na uzavretom intervale $J = \langle a, b \rangle$, kde $a < b$, tvoria reálny vektorový priestor; označme ho $C(J;\mathbb{R})$ (písmeno C je tu z latinského slova *continuo*, znamenajúceho *spojité*). Pre $f, g \in C(J;\mathbb{R})$ definujme

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Overte, že takto definované zobrazenie

$$\langle\ ,\ \rangle : C(J;\mathbb{R}) \times C(J;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

je skalárny súčin.

9. 7.1.5(4) Nech $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ je štandardný skalárny súčin. Nájdite symetrickú maticu A takú, že $g((x_1, x_2, x_3, x_4), (x_1, x_2, x_3, x_4)) = X \cdot A \cdot X^T$ pre vektor (maticu) $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in M_{1,4}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_4$.

Koľko je takých matíc A?

10. 7.2.4(1) Je pravda, že Schwarzova nerovnosť sa zmení na rovnosť práve vtedy, keď vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ sú lineárne závislé? Ak áno, tak to podrobne odôvodnite.

11. 7.2.4(5) Nech $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ je euklidovský vektorový priestor. Dokážte, že pre všetky $\vec{a}, \vec{b} \in V$
(a) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos(\measuredangle \vec{a}, \vec{b})$ (známa *kosínusová veta*)
(b) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$.

12. 7.3.3(4) Nájdite všetky vektory v $\mathbb{R}^3$ so štandardným skalárnym súčinom, ktoré sú kolmé na každý vektor z podpriestoru $L = [(1, 0, -1), (2, 1, 3)]$.