Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie I. – úlohy č. 1

Cvičenia 24. septembra 2015 - Manipulácia s výrazmi, matematická indukcia a pod.

---

1. Upravte uvedené výrazy na čo najjednoduchší tvar:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{9-4\sqrt{5}}, \qquad 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}.$$

2. Zjednodušte/roznásobte zadané výrazy. Zistite aj, pre aké hodnoty premenných sú definované.

a) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$, b) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$, c) $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, d) $(x+y+z)^2$,

e) $(x+y+z)^3$, f) $(x+y)(y+z)(x+z)$, g) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$, h) $\frac{x^n-y^n}{x-y}$,

i) $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$, j) $(x+iy)(x-iy)$, k) $\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}$, l) $\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\dots+\binom{n}{k}$,

m) $\frac{x^2-x-2}{x^2-1}$

3. Dokážte matematickou indukciou, že súčin troch za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný šiestimi.

4. Dokážte, že súčet tretích mocnín troch po sebe idúcich čísel je deliteľný deviatimi. Bude súčet p-tych mocnín p po sebe idúcich čísel deliteľný p^2 pre každé nepárne prvočíslo p?

5. Nad reálnymi číslami rozložte na lineárne činitele mnohočlen x^3+4x^2+x-6.

6. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\le 2-\frac{1}{n}$. (Úloha pre detektívov: čomu sa rovná súčet nekonečného radu $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$?)

7. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n\ge 2$ platí $4^n>3^n+2^n$.

8. Dokážte, že $\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}$.

9. Nájdite všetky reálne (a komplexné) riešenia rovníc:
a) $|x-2|-|x+2|=4$,
b) $|x-2|-|x+2|=0$,
c) $|x-2|-|x+2|=-4$.

10. Pre ktoré reálne číslo c má rovnica $|x^2+12x+34|=c$ práve 3 riešenia?

11. Ak máme dve komplexné čísla $z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $z_2=\cos\beta+i\sin\beta$, čomu sa rovná ich súčin z_1z_2? (Moivrova veta)

12. Odvoďte pomocou komplexných čísel vzorec pre $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$, $\cos 3x$, …, $\sin nx$, $\cos nx$.

13. Zjednodušte

$$\left(\frac{1+3i}{1-3i}\right)^2-\left(\frac{1-3i}{1+3i}\right)^2, \qquad \frac{1}{i}+\frac{1-i}{1+i}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2.$$