Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie I. – úlohy č. 2

Cvičenia 1. októbra 2015 - Zobrazenia, binárne operácie, grupy

---

1. Nech M, N sú konečné množiny, M má m prvkov a N má n prvkov. Koľko existuje zobrazení z množiny M do množiny N? Koľko existuje injekcií/surjekcií/bijekcií $M \to N$?

2. Nech A je konečná množina a $f : A \to A$ je zobrazenie. Dokážte:
a) Ak f je injekcia, tak f je bijekcia.
b) Ak f je surjekcia, tak f je bijekcia.

3. Pre dané zobrazenia $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nájdite $f \circ g$ a $g \circ f$. Rovnajú sa tieto zložené zobrazenia? Načrtnite grafy f, g, $g \circ f$, $f \circ g$?
a) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$,
b) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$,
c) $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$,
d) $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{1+x} & \text{ak } x \geq 0, \\ \frac{1}{1-x} - 1 & \text{ak } x < 0. \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \notin (-1,1), \\ \frac{1}{1-x} - 1 & \text{ak } x \in (-1,1), x > 0, \\ 1 - \frac{1}{1+x} & \text{ak } x \in (-1,1), x < 0 \end{cases}$

4. Pre dané zobrazenia $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nájdite $f \circ g$ a $g \circ f$. Rovnajú sa tieto zložené zobrazenia? ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ označuje množinu prirodzených čísel)
a) $f(n) = 2n$, $g(n) = \lceil n/2 \rceil$,
b) $f(n) = n + 1$, $g(n) = \begin{cases} n - 1 & \text{ak } n \geq 2, \\ 1 & \text{ak } n = 1. \end{cases}$

5. Nájdite príklad zobrazenia $f : X \to Y$, pre ktoré existuje ľavé inverzné zobrazenie, ale neexistuje pravé inverzné zobrazenie. T.j. existuje $g : Y \to X$ také, že $g \circ f = id_X$, ale neexistuje $h : Y \to X$ také, že $f \circ h = id_Y$.

6. Nájdite príklad zobrazenia $f : X \to Y$, pre ktoré existuje pravé inverzné zobrazenie, ale neexistuje ľavé inverzné zobrazenie. T.j. existuje $h : Y \to X$ také, že $f \circ h = id_Y$, ale neexistuje $g : Y \to X$ také, že $g \circ f = id_X$. Môžu byť množiny X a Y konečné? Rovnakej mohutnosti?

7.Ak viete, že ide o tabuľku asociatívnej binárnej operácie, doplňte chýbajúce políčka (ak sa to dá).

	a	b	c
a	b	a	c
b			
c			

8. Ktoré z uvedených množín tvoria vzhľadom na dané operácie grupu? V ktorých prípadoch je táto grupa komutatívna?
a) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ (celé čísla s obvyklým násobením),
b) $(\mathbb{R}, \cdot)$ (reálne čísla s obvyklým násobením),
c) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$,
d) $(\mathbb{C}, +)$,
e) $(\mathbb{C}, \cdot)$,
f) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$,
g) $(\mathbb{R}^2, +)$ (so sčitovaním definovaným po zložkách)
h) $\mathbb{R}$ s operáciou $*$, $a * b = a + b - 1$
i) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ s operáciou $*$, $a * b = ab + a + b$
j) Množina všetkých párnych celých čísel vzhľadom na sčitovanie.
k) Množina všetkých nepárnych celých čísel vzhľadom na sčitovanie.
l) $(\mathbb{Z}_5, \oplus)$,
m) $(M_{2,2}(\mathbb{R}), \cdot)$ (matice typu 2×2 s maticovým násobením),
n) $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) | x \in \mathbb{R}\}$ s operáciou maticového násobenia,

o) $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$ s operáciou maticového násobenia.

9. Tvoria všetky permutácie na konečnej množine M grupu? Je táto grupa komutatívna? Zostrojte tabuľku grupovej operácie v prípade $M = \{1, 2, 3\}$.

10. Nech $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Je G s operáciou $\cdot$ (násobenie komplexných čísel) grupa? Označme $C_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Je $(C_n, \cdot)$ grupa?

11. Dokážte, že ak $(G, \cdot)$ je grupa a $x, y, z \in G$ tak platí

$$xy = xz \Rightarrow y = z,$$

$$yx = zx \Rightarrow x = z.$$

(Tzv. *zákony o krátení* v grupe.)

12. Nech $(G, *)$ je grupa a e je jej neutrálny prvok. Dokážte:

$$x * y = y * x \Leftrightarrow x * y * x^{-1} * y^{-1} = e.$$

13. Ak $(G, \circ)$ je grupa a $a \in G$ je nejaký jej prvok, tak zobrazenie $f_a : G \to G$ definované ako $f_a(b) = a \circ b$ je bijekcia.

14. Nech $(G, \circ)$ je grupa. Dokážte, že zobrazenie $f : G \to G$ definované ako $f(a) = a^{-1}$ je bijekcia. Je to aj homomorfizmus?

15. Nech G je konečná množina a $\circ$ je binárna operácia na G, pre ktorú platí asociatívny zákon a zákony o krátení. Dokážte, že G je grupa.

16. Dokážte, že v konečnej grupe, ktorá má párny počet prvkov, existuje prvok rôzny od neutrálneho prvku taký, že $a \circ a = e$.

17. Nech konečná množina $G = \{e, a_1, \ldots, a_2\}$ tvorí s operáciou $*$ komutatívnu grupu a e je jej neutrálny prvok. Dokážte, že $(a_1 * a_2 * \cdots * a_n)^2 = e$. Nájdite príklad takej grupy, pre ktorú $a_1 * a_2 * \cdots * a_n \neq e$.