Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie I. – úlohy č. 3

Cvičenia 8. októbra 2015 - Grupy, podgrupy, homomorfizmy

---

1. Nech $(G, *_G)$ a $(H, *_H)$ sú grupy. Dokážte, že aj $G \times H$ s operáciou $*$ definovanou ako
$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 *_G g_2, h_1 *_H h_2)$$
je grupa.

2. Zistite, či $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \Box)$, kde pre každé $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ definujeme $(a, b)\Box(c, d) = (2ac, b + d)$, je grupa.

3. Nech $(G, \circ)$ je grupa. Dokážte, že ak $x \circ x = x$, tak $x = e$.

4. Nájdite všetky podgrupy grupy S_3. (LAG1 1.4.6.(8))

5. Ukážte, že $H = \{\frac{m}{n} |\, m, n \text{ sú nepárne}\}$ je podgrupa grupy $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.

6. Nájdite všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ a všetky podgrupy grupy $\mathbb{Z}_4$ (v oboch prípadoch operácia $\oplus$). Majú tieto grupy rovnaký počet dvojprvkových podgrúp? (Viete na základe výsledku zdôvodniť, že tieto dve grupy nie sú izomorfné?)

7. Nech H je podgrupa grupy G. Nech $g \in G$. Ukážte, že $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} |\, h \in H\}$ je podgrupa grupy G.

8. Zistite, či sú grupy $(\mathbb{Z}_4, +)$ a $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot)$ izomorfné.

9. Nech $(G, *)$ a $(H, \circ)$ sú grupy a G je komutatívna. Ukážte, že ak existuje surjektívny homomorfizmus (epimorfizmus) $f : G \to H$, tak aj $(H, \circ)$ je komutatívna grupa. Platí toto tvrdenie, ak predpoklad o existencii zoslabíme a budeme požadovať iba existenciu nejakého homomorfizmu $f : G \to H$?

10. Sú grupy $(\mathbb{Z}_6, +)$ a $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$ izomorfné? (Operáciu $+$ na množine $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ chápeme po zložkách, t.j. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 \oplus_2 x_2, y_1 \oplus_3 y_2)$. Operácie $\oplus_2$ a $\oplus_3$ označujú sčítanie modulo 2 resp. modulo 3 – použili sme iné označenie, aby sa zdôraznilo, že na prvej a druhej súradnici máme inú operáciu.)

11. Nech $f, g : G \to H$ sú dva grupové homomorfizmy. Je množina $\{a \in G |\, f(a) = g(a)\}$ podgrupa grupy G?

12. Nájdite všetky homomorfizmy $(S_3, \circ) \to (\mathbb{Z}_2, +)$.

13. Nech $G = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \setminus \{(0, 0)\}$. Definujme na tejto množine binárnu operáciu $*$ predpisom $(a, b) * (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$. Je to skutočne binárna operácia? Je $(G, *)$ grupa? Je to komutatívna grupa? Porovnajte s násobením $(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2})$.

14. Je množina $A = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ podgrupa grupy $(\mathbb{R}, +)$? Spolu s príkladom č. 13, je $(A, +, \cdot)$ podpole $(\mathbb{R}, +, \cdot)$?

15. Nech $G = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Definujme na tejto množine binárnu operáciu $*$ predpisom $(a, b) * (c, d) = (a + bc, bd)$. Je to skutočne binárna operácia? Je $(G, *)$ grupa? Je to komutatívna grupa? Dalo by sa takéto násobenie dvojíc reprezentovať pomocou nejakého maticového násobenia?

16. Nech $(G, *)$ je ľubovoľná grupa. Dokážte, že zobrazenie $g \mapsto g * g$ je homomorfizmus z G do G práve vtedy, keď G je komutatívna. Platí rovnaké tvrdenie aj pre $g \mapsto g * g * g$?

17. Nech $*$ je binárna operácia na množine A taká, že pre každé $a, b, c \in A$ platí $a * (b * c) = (a * c) * b$ a $*$ má neutrálny prvok. Dokážte, že operácia $*$ je komutatívna a asociatívna.