Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie I. – úlohy č. 4

Cvičenia 15. októbra 2015 - Faktorové grupy, polia, okruhy

Ešte by sme sa mohli vrátiť k príkladom z predošlej sady, napr. 3.2, 3.4, 3.12, 3.11.

1. Overte, či relácia R je reláciou ekvivalencie na množine M:
a) $M = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in M \times M |\, x - y \in \mathbb{Z}\}$,
b) $M = \mathbb{Z}$, $R = \{(x, y) \in M \times M |\, 3|(x + 2y)\}$,
c) $M = \mathbb{R}^2$; $R = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M \times M |\, x_1 = y_1)\}$,
d) $M = G$, kde $(G, \circ)$ je grupa, H je podgrupa grupy G a $R = \left\{(x, y) \in M \times M \middle|\, xy^{-1} \in H\right\}$. Sú niektoré z relácií uvedených v predošlých častiach špeciálnymi prípadmi tejto relácie? Ako by to bolo pre reláciu $R' = \left\{(x, y) \in M \times M \middle|\, y^{-1}x \in H\right\}$. Sú R a R' totožné?
e) M je ľubovoľná množina, $f : M \to S$ je ľubovoľné zobrazenie a $R = \{(x, y) \in M \times M |\, f(x) = f(y)\}$. (LAG1, 1.6.12(1)) Sú niektoré z relácií uvedených v predošlých častiach špeciálnymi prípadmi tejto relácie?

2. Pre zadanú grupu G a jej podgrupu H popíšte faktorovú grupu G/H (napr. nájdite nejakú známu grupu s ňou izomorfnú). Úlohu môžete vyriešiť priamo pomocou definície faktorovej grupy alebo pomocou vety o faktorovom izomorfizme.
a) $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x, y)|\, x + 2y = 0\}$,
b) $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$, $H = \{(x, 3x)|\, x \in \mathbb{R}\}$,
c) $G = (\mathbb{Z}_8, +)$, $H = 2\mathbb{Z}_4 = \{0, 2, 4, 6\}$,
d) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
e) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $H = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}|\, x > 0\}$,
f) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = n\mathbb{Z} = \{nz|\, z \in \mathbb{Z}\}$.

3. Ako S^1 označme grupu $(\{z \in \mathbb{C}|\, |z| = 1\}, \cdot)$, ako C_n grupu $(\{z \in \mathbb{C}|\, z^n = 1\}, \cdot)$. Nájdite faktorové grupy:
a) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)/\{c \in \mathbb{C}|\, c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$,
b) $(\mathbb{R}, +)/\mathbb{Z}$,
c) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)/C_n$,
d) $(\{c \in \mathbb{C}|\, c^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}, \cdot)/\mathbb{R}^+$,
e) C_{12}/C_4,

4. Ktoré z uvedených množín tvoria spolu s obvyklým sčítaním a násobením pole? Ktoré okruh?
a) $F = \{a + ib \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$,
b) $F = \{a + ib \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$,
c) $F = \{a + b\sqrt{5} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$,
d) $F = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \,|\, a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$,
e) $F = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \,|\, a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.

5. Tvorí množina $M_{n,n}(\mathbb{R})$ štvorcových matíc typu $n \times n$ s reálnymi zložkami okruh? Teleso? Ako to bude pre matice so zložkami z iných polí $M_{n,n}(F)$?

6. Tvorí množina polynómov $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(x) = \mathbb{R}[x]$ v premennej x s reálnymi koeficientmi okruh? Pole?

7. Tvorí množina racionálnych funkcií $\mathcal{Q}_{\mathbb{R}}(x) = \left\{\frac{p(x)}{q(x)} \middle|\, p(x), q(x) \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(x), q(x) \neq 0\right\}$ v premennej x s reálnymi koeficientmi okruh? Pole?

8. Tvorí množina spojitých funkcií $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ z intervalu I do $\mathbb{R}$ okruh? Pole?