Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie I. – úlohy č. 5

Cvičenia 22. októbra 2015 - Vektorové priestory, vektorové podpriestory, lineárny obal

---

Ešte by sme sa mohli vrátiť k príkladu 4.2 a), b) z predošlej sady.

1. Koľko prvkov má vektorový priestor $(\mathbb{Z}_3)^n$? Čomu sa v tomto priestore rovná $\vec{\alpha}+\vec{\alpha}+\vec{\alpha}$? Koľko prvkov majú jeho podpriestory?

2. Zistite, či $((\mathbb{R}^+)^n, \oplus, \odot)$ je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$, ak definujeme $\vec{x} \oplus \vec{y} = (x_1, \dots, x_n) \oplus (y_1, \dots, y_n) = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n)$, $c \odot \vec{x} = c \odot (x_1, \dots, x_n) = (x_1^c, \dots, x_n^c)$ pre $\vec{x}, \vec{y} \in (\mathbb{R}^+)^n$ a $c \in \mathbb{R}$.

3. Ktoré z týchto množín tvoria vektorový podpriestor priestoru $\mathbb{R}^3$? Ak netvoria podpriestor, ktorý podpriestor je ich lineárny obal, t.j. najmenší podpriestor, ktorý je ich nadmnožinou?
a) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_i \in \mathbb{Z}\}$,
b) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 = 0\}$,
c) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 = 0 \vee x_2 = 0\}$,
d) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x_1 + 4x_2 = 1\}$,
e) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 7x_1 - x_2 = 0\}$,
f) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 = x_3\}$,
g) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x_1| = |x_2|\}$,
h) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$,
i) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x_1 = -x_2 = x_3\}$,
j) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

4. Ktoré z týchto podmnožín tvoria vektorový podpriestor priestoru reálnych funkcií $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$? Ak netvoria podpriestor, ktorý podpriestor je ich lineárny obal, t.j. najmenší podpriestor, ktorý je ich nadmnožinou?
a) funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $2f(0) = f(1)$,
b) nezáporné funkcie,
c) funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $f(1) = 1 + f(0)$,
d) funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $(\forall x \in \langle 0, 1\rangle) f(x) = f(1-x)$,
e) ohraničené funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
f) funkcie zobrazujúce do intervalu $\langle -1, 1\rangle$, $f : \mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle$,
g) spojité funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
h) funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pre ktoré existuje konečná $\lim_{x\to\infty} f(x)$,
i) analytické funkcie – pre ne existujú $a_i \in \mathbb{R}$ a platí $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$. (zhruba)

5. Ktoré z týchto podmnožín tvoria vektorový podpriestor priestoru $M_{n,n}(\mathbb{R})$ štvorcových matíc typu $n \times n$ s reálnymi zložkami? Ak netvoria podpriestor, ktorý podpriestor je ich lineárny obal, t.j. najmenší podpriestor, ktorý je ich nadmnožinou?
a) symetrické matice $A^T = A$,
b) antisymetricé matice $A^T = -A$,
c) horné/dolné trojuholníkové matice,
d) diagonálne matice,
e) matice, pre ktoré existuje inverzná A^{-1},
f) matice hodnosti 1,
g) matice A, pre ktoré $AB = 0$ pre nejakú fixnú maticu B typu $n \times k$.

6. Ktoré z týchto podmnožín tvoria vektorový podpriestor priestoru $\mathcal{P}_6(x)$ polynómov v premennej x s reálnymi koeficientami stupňa nanajvýš 6? Ak netvoria podpriestor, ktorý podpriestor je ich lineárny obal, t.j. najmenší podpriestor, ktorý je ich nadmnožinou?
a) polynómy s koreňom a_0, t.j. spĺňajúce $p(a_0) = 0$,
b) polynómy s dvojnásobným koreňom a_0,
c) párne polynómy, t.j. $p(x) = p(-x)$,
d) nepárne polynómy, t.j. $p(x) = -p(-x)$,
e) polynómy s reálnymi koreňmi,

f) polynómy deliteľné polynómom $q(x)$.

7. Ktoré z nasledujúcich podmnožín priestoru $\mathbb{R}^\infty$ nekonečných postupností s reálnymi zložkami sú podpriestormi? Ak netvoria podpriestor, ktorý podpriestor je ich lineárny obal, t.j. najmenší podpriestor, ktorý je ich nadmnožinou?
a) Všetky postupnosti, ktoré obsahujú nekonečne veľa núl (napr. $(1, 0, 1, 0, \dots)$).
b) Všetky postupnosti $(x_1, x_2, \dots)$, ktoré sú od istého členu nulové (t.j. $x_j \neq 0$ iba pre konečne veľa členov).
c) Všetky klesajúce postupnosti: $x_{j+1} \leq x_j$ pre každé j.
d) Všetky postupnosti klesajúce v absolútnej hodnote: $|x_{j+1}| \leq |x_j|$ pre každé j.
e) Všetky konvergentné postupnosti: x_j majú limitu pre $j \to \infty$.
f) Všetky aritmetické postupnosti: $x_{j+1} - x_j$ je rovnaké pre všetky j.
g) Všetky geometrické postupnosti $(x_1, kx_1, k^2x_1, \dots)$, kde k a x_1 sú ľubovoľné.
h) Všetky postupnosti so striedajúcimi sa znamienkami: $x_{2k} \geq 0$ a $x_{2k+1} \leq 0$ alebo $x_{2k} \leq 0$ a $x_{2k+1} \geq 0$.
i) postupnosti v $O(f(n))$ pre nejakú (nezápornú) funkciu $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, teda také, že pre $\{x_n\}$ existuje $C \in \mathbb{R}$ a platí $|x_n| \leq Cf(n)$.