Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie I. – úlohy č. 7

Cvičenia 5. novembra 2015 - báza, dimenzia, báza prieniku a súčtu vektorových priestorov

---

1. Predpokladajme, že priestor V má dimenziu k. Ukážte, že
a) ľubovoľných k lineárne nezávislých vektorov vo V tvorí jeho bázu,
b) ľubovoľných k vektorov, ktoré generujú celé V tvorí jeho bázu.

2. a) V priestore matíc typu 2×2 nájdite bázu podpriestoru P – matíc, pre ktoré sa súčty zložiek v riadkoch aj stĺpcoch rovnajú. Teda

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a+b = c+d = a+c = b+d \right\}.$$

b) Nájdite päť lineárne nezávislých matíc typu 3×3 s touto vlastnosťou.

3. Tomograf (ľudovo "CT-čko", to je to, čo sa predražene nakupuje) sníma pacienta z rôznych smerov röntgenovými lúčmi a potom vyprodukuje obrázok zodpovedajúci matici udávajúcej hustotu kostí a tkanív v každom bode. Z matematického hľadiska ide o zistenie hodnôt zložiek akejsi matice z jej projekcií.

Vieme zrekonštruovať 2×2 maticu A, ak poznáme súčty zložiek v každom jej riadku a stĺpci?

Podobne, vieme v 3×3 prípade zrekonštruovať maticu A ak poznáme súčty zložiek v každom riadku, v každom stĺpci ako aj súčty pozdĺž hlavnej diagonály a susedných dvoch diagonál s ňou rovnobežných?

4. Vo vektorovom priestore matíc typu 2×2,
a) budú tvoriť matice s hodnosťou 1 vektorový podpriestor?
b) bude podpriestor generovaný permutačnými maticami vyzerať ako?
c) bude podpriestor generovaný kladnými maticami (t.j. všetky $a_{ij} > 0$) vyzerať ako?
d) bude podpriestor generovaný regulárnymi maticami vyzerať ako?

5. Koľko 5×5 permutačných matíc existuje? Sú lineárne nezávislé v $M_{5,5}$? Generujú celý priestor $M_{5,5}$ matíc typu 5×5? (Netreba ich vypisovať všetky)

6. Ako $\mathcal{P}_n$ označme priestor všetkých polynómov stupňa nanajvýš n. Overte, že $\dim(\mathcal{P}_n) = n+1$, a že $1, x-1, \dots, (x-1)^n$ je bázou tohto priestoru.

7. Uvažujme vektorový priestor $\mathcal{P}_6$ reálnych polynómov stupňa nanajvýš 6 v premennej x. Ukážte, že $\mathcal{P}_6(0)$ – množina polynómov, pre ktoré je 0 koreňom, bude podpriestorom $\mathcal{P}_6$. Nájdite dimenziu a bázu $\mathcal{P}_6(0)$.

Podobne uvažujme polynómy s koreňom 1: $\mathcal{P}_6(1) = \{\, p(x) \,|\, p(1) = 0, p(x) \in \mathcal{P}_6\}$. Nájdite dimenziu a bázu $\mathcal{P}_6(1)$. Čo bude prienik $\mathcal{P}_6(0) \cap \mathcal{P}_6(1)$, akú bude mať dimenziu?

8. Ukážte, že ak $\mathbb{R}$ chápeme ako vektorový priestor nad poľom $\mathbb{Q}$, potom
a) 1, $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$ sú lineárne nezávislé,
b) $1 + 3\sqrt{2}$ a $2 - \sqrt{2}$ sú lineárne nezávislé,
c) 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ sú lineárne nezávislé.

9. Ak sa to dá, doplňte dané vektory na bázu príslušného vektorového priestoru:
a) $(1,1,2)$, $(2,1,3)$ v $\mathbb{R}^3$,
b) $x^2 - 1$, $x^2 + 1$ v priestore polynómov stupňa nanajvýš 3,
c) $(1,2,3,0)$, $(3,4,1,2)$ v $\mathbb{Z}_5^4$.

10. Ukážte, že ak V a W sú trojrozmerné podpriestory priestoru $\mathbb{R}^5$, potom existuje nenulový vektor patriaci do V aj W, teda $V \cap W \neq \{0\}$.

11. Nech S a T sú podpriestory $\mathbb{R}^{13}$ s dimenziami $\dim S = 7$ a $\dim T = 8$.

a) Aká je najväčšia možná dimenzia $S \cap T$?
b) Aká je najmenšia možná dimenzia $S \cap T$?
c) Aká je najmenšia možná dimenzia $S + T$?
d) Aká je najväčšia možná dimenzia $S + T$?

12. Zdôvodnite, prečo sa každý vektor x v priamom súčte $V \oplus W$ dá *jednoznačne* vyjadriť ako $x = v + w$ pre $v \in V$ a $w \in W$.

13. Priestor V je generovaný vektormi $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$ a priestor W vektormi $w_1 = (0, 1, 0, 1)$ a $w_2 = (0, 0, 1, 1)$. Nájdite bázu súčtu $V + W$, ako aj bázu a dimenziu prieniku $V \cap W$.

14. Pravda/nepravda. Zdôvodnite.
a) Ak sú stĺpce matice A lineárne nezávislé, potom má systém $Ax^T = b$ práve jedno riešenie pre každé b.
b) Matica typu 5×7 nikdy nemôže mať lineárne nezávislé stĺpce.
c) Každá báza podpriestoru W sa dá rozšíriť na bázu priestoru V. (predpokladajme $\dim W \neq \dim V$)
d) Každá báza priestoru V sa dá zredukovať na bázu podpriestoru W. (opäť $\dim W \neq \dim V$)
e) Ak vektory $x_1, x_2, \ldots, x_m$ generujú priestor S, potom $\dim S = m$.
f) Prienik dvoch podpriestorov vektorového priestoru X nemôže byť prázdny.

15. Ak každý z vektorov $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m$, tak $\dim([\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k]) \leq \dim([\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m])$.

16. Ukážte, že systém $Ax^T = b$ má riešenie práve vtedy, ak hodnosť$(A) =$ hodnosť(A'), kde matica A' je matica, ktorú získame z A pridaním b ako stĺpca navyše.

17. Nech $T = [(1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 4, 0)]$ je podpriestorom $(\mathbb{Z}_5)^3$. Existuje podpriestor S taký, že $(\mathbb{Z}_5)^3 = T \oplus S$? Ak áno, nájdite ho. Je tento podpriestor jednoznačne určený?

18. Dokážte, že ak $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_k}$ je báza vektorového priestoru V, tak $V = [\vec{e_1}] \oplus \cdots \oplus [\vec{e_k}]$.