Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie I. – úlohy č. 8

Cvičenia 12. novembra 2015 - Matice, maticove operácie, hodnosť, riadkové úpravy

---

1. Ak označíme zložky matice A ako a_{ij}, vyjadrite v tejto symbolike
(i) prvý pivot,
(ii) násobok l_i prvého riadku, ktorý musíme v eliminácii odčítať od i-teho riadku,
(iii) novú hodnotu, ktorá nahradí hodnotu a_{ij} po tomto odčítaní,
(iv) hodnotu druhého pivota,
(v) hodnotu tretieho pivota.

2. Pravda/Nepravda. Zdôvodnite ak je tvrdenie pravdivé, ukážte konkrétny protipríklad ak je nepravdivé.
(i) Ak sú prvý a tretí stĺpec matice B rovnaké, potom sú rovnaké aj prvý a tretí stĺpec súčinu AB.
(ii) Ak sú prvý a tretí riadok matice B rovnaké, potom sú rovnaké aj prvý a tretí riadok súčinu AB.
(iii) Ak sú prvý a tretí riadok matice A rovnaké, potom sú rovnaké aj prvý a tretí riadok súčinu AB.
(iv) $(AB)^2 = A^2B^2$.

3. Metódou pokusov a omylov s maticami typu 2×2 nájdite príklady matíc, ktoré spĺňajú:
(i) $A^2 = -I$, A má reálne zložky,
(ii) $B^2 = 0$, ale $B \neq 0$,
(iii) $CD = -DC$, pritom $CD \neq 0$,
(iv) $EF = 0$, pričom žiadna zo zložiek E a F nie je nulová.

4. Matice, ktoré popisujú rotáciu roviny x-y majú tvar

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

a) Overte, že $A(\theta_1)A(\theta_2) = A(\theta_1\theta_2)$, použijúc súčtové vzorce pre sínus a kosínus.
b) Čo dostaneme súčinom $A(\theta)$ a $A(-\theta)$?

5. Pre matice

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{a} \qquad C = AB = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

nájdite mocniny A^2, A^3, $\dots$, B^2, B^3, $\dots$ a C^2, C^3, $\dots$

6. Nájdite LU rozklad pre maticu A, ako aj lineárny systém $Ux^T = c^T$ v hornom trojuholníkovom tvare, ktorý vznikne elimináciou pre

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

7. Nájdite rozklady $PA = LDU$ (a skontrolujte ich) pre

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

V oboch prípadoch robte elimináciu tak, ako ste zvyknutí, ale navyše si zapíšte každú elementárnu maticu. V prvom prípade by Vám malo výjsť poradie P, $E_{3,1}$, $E_{3,2}$, teda rovnosť $E_{3,2}E_{3,1}PA = U$, z čoho sa už ľahko dá nájsť rozklad.

V druhom prípade by poradie malo výjsť $E'_{2,1}$, $E'_{3,1}$, P', teda rovnosť $P'E'_{3,1}E'_{2,1}A' = U'$. Matice P' a $E'_{3,1}$, resp. $E'_{2,1}$, nekomutujú, ale platí $P'E_{3,1} = F_{2,1}P'$ pre nejakú inú elementárnu maticu $F_{2,1}$, a tiež $P'E_{2,1} = F_{3,1}P'$ pre nejakú $F_{3,1}$. Ukážte, že matice $F_{2,1}$ a $F_{3,1}$ navzájom komutujú, čiže môžeme prejsť k rovnosti $P'E'_{3,1}E'_{2,1}A' = F_{3,1}F_{2,1}P'A' = U'$. Vysvetlite čo postupnosť operácií daných maticami P', $F_{2,1}$ a $F_{3,1}$ robí so systémom, a aký je význam danej maticovej rovnosti $P'E'_{3,1}E'_{2,1} = F_{3,1}F_{2,1}P'$.

8. a) Za akých podmienok je matica A regulárna, ak A vznikne ako súčin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}?$$

b) Namiesto klasického riešenia systému $Ax^T = b$ pomocou substitúcie do $Ux^T = c^T$, riešte pomocou nového vektora neznámych c v rovnici $Lc^T = b$ pre

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b.$$

9. Nájdite riešenie $LUx^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$
bez toho, aby ste roznásobovali LU.

10. Pomocou eliminácie nájdite rozklad matice $A = LU$, ak

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

Akú podmienku musia spĺňať čísla a, b, c, d aby boli stĺpce A lineárne nezávislé?

11. Pravda/nepravda. Zdôvodnite.
a) Vektory b, ktoré nepatria do riadkového priestoru S_A tvoria podpriestor.
b) Ak S_A obsahuje iba nulový vektor, potom je A nulová matica.
c) Riadkový priestor matice $2A$ je rovnaký ako riadkový priestor matice A.
d) Riadkový priestor matice $A - I$ je rovnaký ako riadkový priestor matice A.

12. Každý riadok matice AB je kombináciou riadkov matice B. To znamená, že *riadkový priestor matice AB je podmnožinou riadkového priestoru matice B (alebo sa mu rovná).* Uveďte príklad, kde sa riadkové priestory matíc B a AB nerovnajú.

13. Nájdite maticu s požadovanými vlastnosťami, alebo dokážte, že taká nemôže existovať.
a) Priestor generovaný stĺpcami obsahuje $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, priestor generovaný riadkami obsahuje $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$.
b) Priestor generovaný stĺpcami má bázu $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, priestor riešení homogénneho systému $Ax^T = 0$ má bázu $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.
c) Priestor generovaný stĺpcami $= \mathbb{R}^4$, priestor generovaný riadkami $= \mathbb{R}^3$.

14. Prečo nemôže existovať matica, ktorej nulový aj riadkový priestor by obsahovali vektor $[1, 1, 1, 1]^T$?
Nulový priestor matice A typu $m \times n$ je priestor homogénnych riešení $\{x \in \mathbb{R}^n |\, Ax^T = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$.
Riadkový priestor matice A je priestor generovaný jej riadkami, t.j. $\{yA |\, y \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^n$.