Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie I. – úlohy č. 9

Cvičenia 19. novembra 2015 - Lineárne zobrazenia, matica zobrazenia, jadro

---

Úlohy z predošlých cvičení: 8.4, 8.5

1. Rozhodnite, či zloženie piatich osových symetrií a ôsmich rotácí roviny dá rotáciu alebo osovú symetriu. Záleží na poradí v ktorom tieto transformácie robíme?

2. Nájdite matice typu 3×3 reprezentujúce transformácie v $\mathbb{R}^3$, ktoré
i) sprojektujú každý vektor do roviny xy,
ii) zobrazia každý vektor symetricky podľa roviny xy,
iii) otočia rovinu xy o uhol γ, nechajúc os z namieste,
iv) otočia rovinu xy, potom rovinu xz a nakoniec rovinu yz, vždy o $90°$,
v) spravia tie isté rotácie ako v iv) len vždy o $180°$.

3. Priestor všetkých matíc typu 2×2 má štyri bázové "vektory"

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ukážte, že operácia *transpozície* je lineárnou transformáciou na tomto priestore a nájdite príslušnú maticu A v tejto báze. Prečo platí $A^2 = I$?

4. Priamku prechádzajúcu cez koncové body vektorov u a v môžeme reprezentovať ako koncové body množiny vektorov $P = \{tu + (1-t)v \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Ukážte, že každá lineárna tansformácia α zobrazuje priamku na priamku. Tiež ukážte, že stred úsečky tvorenej koncovými bodmi vektorov x a y sa zobrazí na stred úsečky z $\alpha(x)$ do $\alpha(y)$.

5. Nájdite maticu lineárnej transformácie (je to naozaj lineárna transformácia?) z priestoru polynómov $P_3(t)$ do priestoru $P_4(t)$, ktorá každému polynómu priradí jeho $(2+3t)$-násobok.

6. Predpokladajme, že α je lineárna transformácia roviny xy reprezentovaná maticou M. Ukážte, že ak existuje zobrazenie α^{-1}, potom je aj ono lineárnou transformáciou. Vysvetlite prečo matica M^{-1} reprezentuje α^{-1}.

7. Lineárna transformácia posielajúca vektor tvaru (x_1, x_2, x_3) do (x_2, x_3, x_1) je rotácia. Nájdite jej os a uhol.

8. Vymyslite vektorový priestor, ktorý obsahuje všetky lineárne transformácie z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$. Musíte definovať sčítanie lineárnych transformácií, ako aj násobenie skalárom. Aká bude dimenzia takéhoto priestoru?

9. Ako by sa dala skonšturovať matica, ktorá zobrazí vektory štandardnej bázy e_1, e_2, e_3 na dané vektory v_1, v_2, v_3? Kedy bude takáto matica regulárna?

10. Vo vektorovom priestore $P_3(t)$ polynómov stupňa 3, t.j. $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$, majme podmnožinu S polynómov spĺňajúcich $\int_0^1 p(t)dt = 0 \in \mathbb{R}$. Overte, že S je podpriestor a nájdite jeho bázu.
Pozn. Použite vzorec $\int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$. Všimnite si, že zobrazenie $p(t) \mapsto \int_0^1 p(t)dt$ je lineárna transformácia z $P_3(t)$ do $\mathbb{R}$ a množina S jej jadro.

11. Nech V a W sú vektorové priestory nad poľom F a $f : V \to W$ je lineárne zobrazenie. Ukážte, že ak $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sú lineárne závislé, tak aj $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ sú lineárne závislé.

12. Nech $f : V \to W$ je lineárne zobrazenie z vektorového priestoru V do vektorového priestoru W nad poľom F. Dokážte:

Ak S je podpriestorom vektorového priestoru V, tak jeho *obraz* $f(S) = \{f(v) | v \in S\}$ je podpriestor priestoru W.
Ak T je podpriestorom vektorového priestoru W, tak jeho *vzor* $f^{-1}(T) = \{v \in V | f(v) \in T\}$ je podpriestor priestoru V.

13. Zistite, či pre ľubovoľné matice A, B, C typu $n \times n$ platia vzťahy $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CBA)$ a $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(ACB)$. (Svoje tvrdenie zdôvodnite.) Ak niektorý z týchto vzťahov neplatí, bude platiť za dodatočného predpokladu, že matica A je symetrická?

14. Nech $C = AB$, kde A, B sú matice. Musí potom platiť $S_C \subseteq S_A$? Musí platiť $S_C \subseteq S_B$? Musí platiť $S_A \subseteq S_C$, $S_B \subseteq S_C$? (Pripomeňme, že S_A je podpriestor generovaný riadkami matice A.)

Platí nejaké podobné tvrdenie aj pre obrazy zobrazení $\alpha : U \to V$, $\beta : V \to W$ a $\beta \circ \alpha : U \to W$?

15. a) Nech A, B sú matice nad poľom F typu $m \times n$ resp. $n \times k$. Dokážte, že $h(AB) \leq h(A)$. Dokážte, že ak $n = k$ a B je regulárna, tak $h(AB) = h(A)$.

b) Nech A, B sú matice nad poľom F typu $m \times n$ resp. $n \times k$. Dokážte, že $h(AB) \leq h(B)$. Dokážte, že ak $m = n$ a A je regulárna, tak $h(AB) = h(B)$.

16. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ takého, že $f(1, 2, 3, 3) = (0, 0, 0, 0)$, $f(1, 1, 3, 2) = (1, 0, 3, 1)$, $f(1, 1, 2, 0) = (2, 0, 1, 0)$ a $f(1, 0, 3, 1) = (2, 1, 3, 1)$.