Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie I. – úlohy č. 11

Cvičenia 3. decembra 2015 - Riadkové operácie a systémy, riešiteľnosť systému, Fredholmova alternatíva, pravá/ľavá inverzná matica, determinanty

---

Úlohy z predošlých cvičení: (systémy) 8.6, 8.7, 8.13, 8.14, (inverzné matice) 10.8, 10.14

1. a) Akú podmienku musí spĺňať pravá strana b, aby mal systém $Ax^T = b$ riešenie, ak

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}?$$

b) Nájdite bázu nulového priestoru (jadra) matice A.
c) Nájdite všeobecné riešenie systému $Ax^T = b$, ak riešenie existuje.
d) Nájdite bázu stĺpcového priestoru matice A.
e) Aká je hodnosť matice A^T?

2. Nech $Ax^T = 0$ má netriviálne riešenie. Ukážte, že $yA = f$ nebude mať riešenie pre nejaké f. Nájdite príklad takého A a f.

3. Ak A je $n \times n$ matica spĺňajúca $A^2 = A$ a A má hodnosť n, potom ukážte, že $A = I$.

Nech A je matica typu $m \times n$. Matica B typu $n \times m$ sa nazýva *pravá inverzná* matica k matici A, ak platí $AB = I$. Matica C typu $n \times m$ sa nazýva *ľavá inverzná* matica k matici A, ak platí $CA = I$.

4. Ak B je pravá inverzná matica k matici A, čo sa dá povedať o zobrazeniach $f : x \mapsto xA$ a $g : y \mapsto yB$? Ktoré z nich je surjektívne/injektívne? Čo to vypovedá o hodnosti matíc A a B?

5. Akú podmienku musí spĺňať matica A, aby sústava $Ax^T = e_i$ mala riešenie pre každý vektor e_i zo štandardnej bázy $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ priestoru $\mathbb{R}^m$?. Vyplýva z toho existencia pravej inverznej matice k matici A? Aká je štruktúra riešení systému $Ax^T = e_i$? Čo to znamená pre pravé inverzné matice?

6.(*Paradox*) Majme pravú inverznú maticu k A, teda $AB = I$. Po prenásobení maticou A^T dostaneme $A^T AB = A^T$, z čoho $B = (A^T A)^{-1} A^T$. Ale potom $BA = I$, t.j. B by mala byť aj *ľavá* inverzná matica k A. Ktorý krok v tomto "dôkaze" je nekorektný?

7. Nájdite determinanty pre nasledujúce matice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}.$$

Pre akú hodnotu parametra λ je $A - \lambda I$ singulárna?

8. Ako súvisia hodnoty determinantov $\det(2A)$, $\det(-A)$ a $\det(A^2)$ s hodnotou determinantu $\det(A)$ pre $n \times n$ maticu A?

9.Ukážte prečo

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{a} \quad \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -1.$$