Cvičenia z lineárnej algebry a geometrie I. – úlohy č. 13

Cvičenia 17. decembra 2015 - Skalárny súčin, ortogonalita, projekcie

---

1. V $\mathbb{R}^3$ nájdite všetky vektory, ktoré sú kolmé na vektory $(1,1,1)$ a $(1,-1,0)$. Vytvorte z týchto vektorov bázu $\mathbb{R}^3$, v ktorej budú všetky vektory navzájom ortogonálne a budú mať jednotkovú dĺžku (tvoria tzv. *ortonormálnu* bázu).

2. Nech S je podpriestor $\mathbb{R}^4$ tvorený vektormi spĺňajúcimi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Nájdite bázu priestoru $S^\perp$, t.j. priestoru vektorov kolmých na S.

3. Nech V a W sú ortogonálne podpriestory. Ukážte, že iba nulový vektor patrí do oboch z nich, t.j. $V \cap W = \{0\}$.

4. Ukážte, že $x - y$ je kolmé na $x + y$ práve vtedy, keď $\|x\| = \|y\|$.

5. Aký uhol zviera vektor $(1, 1, \ldots, 1)$ v $\mathbb{R}^n$ so súradnicovými osami? Ako vyzerá projekcia na priamku danú týmto vektorom?

6. Pravda/Nepravda. Zdôvodnite.
a) ak V je ortogonálny k W, potom aj $V^\perp$ je ortogonálny k $W^\perp$,
b) Ak V je ortogonálny k W a W je ortogonálny k Z, potom aj V je ortogonálny k Z.

7. Nech V je ortogonálny doplnok podpriestoru W v $\mathbb{R}^n$. Existuje matica A, ktorej riadkový priestor je V a (pravý) nulový priestor je W (t.j. $W = \{x |\, Ax^T = 0\}$)? Vychádzajúc z bázy priestoru V, ukážte ako by sa skonštruovala taká matica.

8. Nech S je podpriestor $\mathbb{R}^n$. Vysvetlite, čo znamená rovnosť $(S^\perp)^\perp = S$ a prečo platí.

9. Aký násobok vektora $a = (1,1,1)$ je najbližšie k bodu $b = (2,4,4)$? Nájdite tiež najbližší bod k bodu a na priamke prechádzajúcej cez b.

10. Molekula metánu CH_4 vyzerá tak, že atóm uhlíka je v strede pravidelného štvorstena a štyri atómy vodíka sú v jeho vrcholoch. Ak si za vrcholy vyberieme body $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ a $(0,1,1)$, potom dĺžky všetkých hrán medzi nimi budú $\sqrt{2}$, teda naozaj ide o pravidelný štvorsten. Aký je kosínus uhla medzi úsečkami spájajúcimi stred $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ s vrcholmi? Aká je veľkosť tohto uhla?

11. a) Nájdite projekčnú maticu P_1 zobrazujúcu rovinu $\mathbb{R}^2$ na priamku danú vektorom $a = \left[\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right]$ a maticu P_2 zobrazujúcu rovinu na priamku s ňou kolmú.
b) Vypočítajte $P_1 + P_2$ a $P_1 P_2$. Vysvetlite.

12. Ukážte, že *stopa* matice $P = a^T a / a a^T$ – t.j. súčet zložiek na jej diagonále – sa vždy rovná 1.

13. Predpokladajme, že P je projekčná matica na priamku prechádzajúcu cez a.
a) prečo je skalárny súčin vektorov x a Py rovnaký ako skalárny súčin vektorov Px a y?
b) sú aj uhly medzi nimi rovnaké? Porovnajte ich kosínusy pre $a = (1,1,-1)$, $x = (2,0,1)$ a $y = (2,1,2)$.
c) Prečo je skalárny súčin vektorov Px a Py opäť rovnaký? Aký je uhol medzi týmito dvoma vektormi?

14. Nájdite projekciu vektora b do priestoru generovaného stĺpcami matice A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Rozložte b na zložku p patriacu do stĺpcového priestoru a zložku r kolmú na tento priestor. Do ktorého zo štyroch základných podpriestorov patrí vektor r?

Poznámka: Pre $m \times n$ maticu A máme *riadkový priestor* $\{xA|\, x \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^n$, *stĺpcový priestor* $\{Ay^t|\, y \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$, *(ľavý) nulový priestor* $\{x \in \mathbb{R}^m|\, xA = 0\}$, *(pravý) nulový priestor* $\{y \in \mathbb{R}^n|\, Ay^T = 0\}$)

15. a) Ak $P = P^T P$, ukážte, že P je projekčnou maticou.
b) Na aký podpriestor zobrazuje projekčná matica $P = 0$?

16. Predpokladajme, že P je projekčná matica zobrazujúca na podpriestor S a Q je projekčná matica zobrazujúca na jeho ortogonálny doplnok $S^\perp$. Čo budú $P + Q$ a PQ? Ukážte, že matica $P - Q$ je sama sebe inverznou. Akú lineárnu transformáciu predstavuje?

17. Predpokladajme, že $n \times n$ matica P spĺňa $P^2 = P$. Ukážte, že potom stĺpcový priestor $\mathcal{S}(I - P)$ je podpriestorom (pravého) nulového priestoru $\mathcal{N}(P)$.
Skúste načrnúť zobrazenie dané maticou P a zdôvodniť prečo by mala platiť rovnosť $\mathcal{S}(I-P) = \mathcal{N}(P)$. (Ako by vyzeral vektor, ktorý by patril do $\mathcal{N}(P)$ a nepatril do $\mathcal{S}(I - P)$?)

18. (3.3.12) Ak V je podpriestor generovaný vektormi $(1, 1, 0, 1)$ a $(0, 0, 1, 0)$ nájdite
a) bázu ortogonálneho doplnku $V^\perp$,
b) projekčnú maticu P zobrazujúcu na V,
c) vektor vo V, ktorý je najbližšie k vektoru $b = (0, 1, 0, -1)$ z $V^\perp$.

19. Nájdite projekcie vektora $b = (0, 3, 0)$ na priamky dané navzájom ortogonálnymi vektormi $a_1 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ a $a_2 = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Nájdite projekciu vektora b na rovinu generovanú a_1 a a_2.

20. Ukážte, že ortogonálna matica, ktorá je zároveň hornou trojuholníkovou musí byť diagonálna.

21. Nech Q_1 a Q_2 sú ortogonálne matice (t.j. spĺňajú $Q^T Q = I$). Ukážte, že aj súčin $Q_1 Q_2$ je ortogonálna matica. Ak matica Q_1 reprezentuje otočenie (v $\mathbb{R}^2$) o uhol θ a matica Q_2 otočenie o uhol ϕ, čo bude $Q_1 Q_2$? Čo bude $Q_2 Q_1$? Nájdite súčtové vzorce pre $\sin(\theta + \phi)$ a $\cos(\theta + \phi)$ v súčine $Q_1 Q_2$.

22. Nech u je vektor jednotkovej dĺžky. Ukážte, že $Q = I - 2u^T u$ je ortogonálna matica. Táto matica reprezentuje súmernosť podľa nadroviny $\rho = \{x \,|\, ax^T = 0\}$ a nazýva sa Householderova transformácia. Skúste si nakresliť obrázok, projekciu na priamku danú vektorom u, atď. Vypočítajte Q pre $u^T = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

23. Nájdite tretí stĺpec matice

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} & \end{bmatrix}$$

tak, aby bola ortogonálna (t.j. $Q^T Q = I$). Musí to byť vektor jednotkovej dĺžky, ortogonálny na zvyšné dva stĺpce – koľko voľnosti vlastne zostáva? Ukážte, že potom budú aj riadky matice Q ortonormálne.

24. Ak sú vektory q_1, q_2 a q_3 ortonormálne, ktorá lineárna kombinácia q_1 a q_2 je nabližšie ku q_3?

25. Použite Gram-Schmidtov proces na vektory

$$a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a vyjadrite výsledok v tvare $A = QR$.

26. Nájdite ortonormálnu bázu pre podpriestor generovaný vektormi $a_1 = (1, -1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, -1, 0)$ a $a_3 = (0, 0, 1, -1)$.

27. Nájdite príklad podpriestorov V a W v $\mathbb{R}^3$ tak, aby $V \cap W$ obsahovalo iba nulový vektor ale V nebol ortogonálny na W.

28. Ukážte, že ak vektory $v_1, \dots, v_n$ tvoria ortonormálnu bázu $\mathbb{R}^n$, potom $v_1^T v_1 + \dots + v_n^T v_n = I$.

29. *Pravda/Nepravda:* Ak vektory x a y sú ortogonálne a P je projekcia, potom Px a Py sú ortogonálne. Zdôvodnite.

30. Majme vektory $a_1 = (1, 1, 1)$ a $a_2 = (1, -1, 1)$. Maticu projekcie na vektor a_1 označme P_1 a maticu projekcie na vektor a_2 označme P_2, t.j. $P_i = \frac{a_i^T a_i}{a_i a_i^T}$. Nájdite maticu projekcie P na rovinu generovanú vektormi a_1, a_2 a presvedčte sa, že $P \neq P_1 + P_2$. Akú podmienku by museli spĺňať vektory a_1, a_2 aby takáto rovnosť platila?