

Dokážte nasledujúce tvrdenia.

1. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.
2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.
3. Dokážte, že $n(2n^2 + 1)$ je deliteľné troma pre každé $n \in \mathbb{N}$.

Zistite či nasledujúce formuly sú tautológie:

4. $p \Rightarrow [(\neg q \wedge q) \Rightarrow r]$.
5. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Leftrightarrow p]$.
6. Rozhodnite či je nasledujúce tvrdenie pravdivé: „Ján ovláda logiku vtedy a len vtedy, ak nie je pravda, že nie je pravda, že Ján ovláda logiku”.
7. Rozhodnite či je nasledujúce tvrdenie pravdivé: „Ak je prirodzené číslo a deliteľné troma, potom z faktu, že a nie je deliteľné troma vyplýva, že a je deliteľné piatimi”.
8. Zapište formálne výrok „ n je najväčšie prirodzené číslo”, pričom môžete použiť existenčný a všeobecný kvantifikátor, reláciu *menší* (napr. $p < q$) a logické spojky.

Bonusové príklady

9. Zdefinujte logickú spojku *a* (\wedge) pomocou spojky *alebo* (\vee) a *negácie* (\neg).
10. Zdefinujte logickú spojku *alebo* (\vee) pomocou *implikácie* (\Rightarrow) a *negácie* (\neg).
11. Dokážte, že iba s pomocou *ekvivalencie* (\Leftrightarrow) a *negácie* (\neg) nie je možné zdefinovať spojku *alebo* (\vee) ani spojku *a* (\wedge).