

Definujme postupnosť prirodzených čísel $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ nasledovne:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \quad \text{pre } n \geq 3.$$

(Dostaneme teda postupnosť čísel 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...) Táto postupnosť sa nazýva *Fibonacciho postupnosť*.

1. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ sú čísla F_n a F_{n+1} nesúdeliteľné.
2. Dokážte nasledovnú formulu pre Fibonacciho číslo F_n :

$$F_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}.$$

3. Dokážte platnosť identity: $F_{m+n} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ pre $n \geq 2, m \geq 1$.
4. Dokážte nerovnosť: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n}$.
5. Ukážte, že každý n -uholník sa dá rozdeliť na $n - 2$ neprekrývajúcich sa trojuholníkov. Odvoďte z toho formulu pre súčet uhlov v n -uholníku.
6. Nájdite disjunktívnu normálnu formu pre výrok $p \wedge [q \vee (\neg p \wedge r)]$.
7. Zapište v jazyku predikátovej logiky výrok: „ x dáva po delení štyrmi zvyšok 1 alebo 2”.

V príkladoch č. 7 a 8 môžete použiť znaky pre operácie sčítania a násobenia, všeobecný a existenčný kvantifikátor, reláciu menší a pod.

Bonusové príklady

8. Zapište v jazyku predikátovej logiky výrok: „ x je prvočíslo”.
9. Majme v rovine n priamok vo všeobecnej polohe, t.j. žiadne dve z nich nie sú rovnobežné. Na koľko častí delia rovinu?
10. Zdôvodnite, že nasledujúce tvrdenie je tautológiou:

$$(\exists x)(\forall y) \Phi(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x) \Phi(x, y).$$

Je aj nižšie uvedená obrátená implikácia tautológiou? *Pomôcka: skúste nájsť protipríklad.*

$$(\forall y)(\exists x) \Phi(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y) \Phi(x, y).$$