Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 3

Cvičenia v týždni 9. októbra 2006

Zopakujme si definície niektorých pojmov výrokovej logiky:

Hovoríme, že formula A je *tautologickým dôsledkom* množiny formúl T, ak pre každé ohodnotenie v, ktoré dáva $v(B) = 1$ pre $B \in T$, platí aj $v(A) = 1$. Zapisujeme $T \models A$.

Nech T je množina výrokových formúl. Hovoríme, že postupnosť $B_1, \dots, B_n$ je *dôkazom formule A z predpokladov T*, ak:
1) B_n je A
2) Každé B_k pre $k = 1, \dots, n$ je buď axiómou (A1), (A2) alebo (A3), alebo B_k patrí do T, alebo je B_k bezprostredným dôsledkom aplikácie pravidla modus ponens na nejaké dve formule z $\{B_1, \dots, B_{k-1}\}$.

Ak existuje dôkaz formule A z predpokladov T hovoríme, že A je *dokázateľná z predpokladov T*. Zapisujeme $T \vdash A$.

1. Ukážte, že „$a \Rightarrow b$" je tautologickým dôsledkom výrokov „$a \wedge \neg b$" a „$\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a$".
Toto tvrdenie môžeme zapísať aj ako $\{a \wedge \neg b, (\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a)\} \models a \Rightarrow b$.

2. Ukážte: $\{a \wedge \neg b, (\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow b)\} \models a \Rightarrow b$.

3. Ukážte: $\{(\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow c), (\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg c)\} \models a \Rightarrow b$.

4. Ukážte, že formula $\neg a$ je dokázateľná z predpokladov $\{\neg(a \Rightarrow b), \neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a\}$.

5. Ukážte, že ak T_0 je nesplniteľná množina formúl a $T_0 \subseteq T$, potom aj T je nesplniteľná.

6. Nech D je ľubovoľná z axióm výrokovej logiky a E je ľubovoľná formula. Zostrojte dôkaz formule $E \Rightarrow D$.

Bonusové príklady

7. Ukážte, že formula $a \Rightarrow b$ je dokázateľná z predpokladov $\{\neg(a \Rightarrow b), \neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a\}$. Pomôcka: ukážte, že $\{\neg(a \Rightarrow b), \neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a\} \vdash \neg b \Rightarrow \neg a$ a použite (A3).
Porovnajte s príkladom č. 1.

8. Nech T je množina formúl a A, B, C sú ľubovoľné formule. Ukážte, že ak $T \vdash A \Rightarrow B$ a $T \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ potom aj $T \vdash A \Rightarrow C$. Pomôcka: výjdite z (A2) a použite dva krát modus ponens.