

1. Zistite či sú nasledujúce kvantifikované formule s ľubovoľnými predikátmi Φ , Ψ a A tautológie. Ak sú, dokážte to, ak nie sú, nájdite protipríklad:

- a) $(\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)) \Rightarrow ((\forall x) \Phi(x) \Rightarrow (\forall x) \Psi(x))$,
- b) $(\forall x)(\Phi(x) \wedge \Psi(x)) \Leftrightarrow ((\forall x) \Phi(x) \wedge (\forall x) \Psi(x))$,
- c) $((\exists x) \Phi(x) \wedge (\exists x) \Psi(x)) \Rightarrow (\exists x)(\Phi(x) \wedge \Psi(x))$,
- d) $(\exists x)(\Phi(x) \vee \Psi(x)) \Leftrightarrow ((\exists x) \Phi(x) \vee (\exists x) \Psi(x))$,
- e) $(\forall x)(\Phi(x) \vee \Psi(x)) \Rightarrow ((\forall x) \Phi(x) \vee (\forall y) \Psi(x))$,
- f) $(\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)) \Rightarrow ((\exists x) \Phi(x) \Rightarrow (\exists x) \Psi(x))$,
- g) $(\forall x)(\forall y) A(x, y) \Rightarrow (\forall x) A(x, x)$,
- h) $(\exists x)(\exists y) A(x, y) \Rightarrow (\exists x) A(x, x)$.

2. Hovoríme, že formula A je v *prenexnom* tvare, ak má tvar $(Q_1x_1)(Q_2x_2) \dots (Q_nx_n) B$, kde každé Q_i je \exists alebo \forall , x_1, \dots, x_n sú navzájom rôzne premenné a B neobsahuje žiadne kvantifikátory.

Nájdite formule v prenexnom tvare, ktoré sú ekvivalentné nasledujúcim formuliam:

- a) $(\forall x) \Phi(x) \wedge (\forall x) \Psi(x)$,
- b) $(\forall x) \Phi(x) \vee (\forall x) \Psi(x)$,
- c) $(\exists x) \Phi(x) \wedge (\forall x) \Psi(x)$,
- d) $(\exists x) \Phi(x) \vee (\exists x) \Psi(x)$,
- e) $(\exists x) \Phi(x) \Rightarrow (\exists x) \Psi(x)$.