Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 11

Cvičenia v týždni 3. decembra 2006

Príklady č. 1 a 2 slúžia na lepšie pochopenie konštrukcie bijektívneho zobrazenia z dôkazu Cantor–Bernsteinovej vety. Bolo by vhodné aby sa každý zo študentov pokúsil o ich vyriešenie.

1. Majme intervaly $A = (0, 1)$ a $B = (0, 1\rangle$. Potom zobrazenia $f : A \to B$ (dané predpisom $x \mapsto x$) a $g : B \to A$ (dané predpisom $g : x \mapsto x/2$) sú injektívne. Tým pádom sa na ne vzťahuje tvrdenie Cantor–Bernsteinovej vety a medzi množinami A a B existuje bijekcia h. Pozorne si preštudujte konštrukciu z dôkazu Cantor–Bernsteinovej vety, zistite čo budú v tomto prípade množiny A_1, A_2, B_1 a B_2 a ako vyzerá výsledná bijekcia h.

2. Spravte to isté, čo v príklade č. 1 pre intervaly $A = (0, 1)$ a $B = \langle 0, 1\rangle$, injekciu $f : A \to B$ (danú predpisom $x \mapsto x$) a injekciu $g : B \to A$ (vhodnú funkciu nájdite sami).

3. Zoraďte všetky prvky množiny $\mathbb{Q}$ do prostej postupnosti. (T.j. každé racionálne číslo sa v postupnosti bude nachádzať práve raz).

4. Nájdite bijekciu medzi množinami $(0, 1\rangle \times \langle 0, 1)$ a $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.

5. Dokážte, že množina všetkých otvorených intervalov s koncami v racionálnych číslach je spočítateľná.

6. Dokážte, že množina všetkých otvorených intervalov s koncami v reálnych číslach je nespočítateľná.

7. Nájdite bijekciu medzi všetkými racionálnymi číslami a nenulovými racionálnymi číslami. Existuje taká bijekcia, ktorá zachováva usporiadanie (t.j. ak $x < y$, potom aj $f(x) < f(y)$)?

Bonusové príklady

8. Ukážte, že v rovine nemôžeme mať nespočítateľne veľa po dvojiciach disjunktných otvorených diskov. (Otvorený disk so stredom v $[x_0, y_0]$ a polomerom $\varepsilon > 0$ je $D_\varepsilon[x_0, y_0] = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon\}$). Čo sa zmení ak nahradíme 'otvorené disky' 'kružnicami'?

9. Zostrojte funkciu $f : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$, ktorá na každom intervale nadobúda všetky možné hodnoty. Inými slovami, pre každé $0 \leq a < b \leq 1$ a každé $c \in \langle 0, 1\rangle$ existuje x, také že $a < x < b$ a $f(x) = c$.