

1. Označme $0 = |\emptyset|$ a $1 = |\{\emptyset\}|$. Ukážte, že pre každé kardinálne číslo p platí:
 - a) $p + 0 = p \cdot 1 = p$,
 - b) $p^0 = 0^0 = 1$,
 - c) $p^1 = p$.

 2. Dokážte, že pre ľubovoľné kardinálne čísla p, q a r platí:
 - a) $p \leq q \Rightarrow pr \leq qr$,
 - b) $p \leq q \Rightarrow p^r \leq q^r$,
 - c) ak $r \neq 0$, potom $p \leq q \Rightarrow r^p \leq r^q$. Čo sa stane ak $r = 0$?

 3. Zachová sa platnosť tvrdení v príklade č. 2, ak zameníme neostré nerovnosti za ostré?

 4. Dokážte, že každý systém navzájom disjunktných intervalov je spočítateľný.

 5. Označme $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ a $c = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ platí:
 - a) $c = nc = \aleph_0 c = cc = c^n = c^{\aleph_0}$,
 - b) $2^{\aleph_0} = n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c$,
 - c) $2^c = n^c = \aleph_0^c = c^c$.

 6. Nech A_1, A_2, \dots sú také množiny, že pre každé n máme $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$. Môže sa stať že $A_1 \cap A_2 \cap \dots = \emptyset$?

 7. Dokážte, že existuje injekcia z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R} . Existuje injekcia z množiny všetkých postupností s reálnymi hodnotami do \mathbb{R} ? Vedeli by ste ju skonštruovať?

 8. Ukážte, že množina všetkých konečných podmnožín množiny \mathbb{N} je spočítateľná. Čo zlyhá, ak by sme sa pokúšali použiť diagonálny princíp na ukázanie toho, že je nespočítateľná?
- Bonusové príklady**
9. Nech \mathcal{S} je taká trieda podmnožín \mathbb{N} , že pre každé $A, B \in \mathcal{S}$ máme $A \subset B$ alebo $B \subset A$. Môže byť \mathcal{S} nespočítateľná?

 10. Hovoríme, že funkcia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je *rastúca* ak $f(n+1) \geq f(n)$ pre všetky n a *klesajúca* ak $f(n+1) \leq f(n)$ pre všetky n . Je množina všetkých rastúcich funkcií spočítateľná alebo nespočítateľná? Ako je to s množinou klesajúcich funkcií?