Príklady na precvičenie:

(Priebežne nachádzam a opravujem nejaké chyby v zadaniach...pardon) **1.** Dokážte nasledujúce ekvivalencie (z domácej úlohy 5 - zadanie a) je opravené):
a) $(A \setminus C \subseteq B \setminus C) \Leftrightarrow (A \subseteq B \cup C)$
Riešenie:
1.$\Rightarrow$ Za predpokladu, že platí $A \setminus C \subseteq B \setminus C$, ukážeme, že platí $A \subseteq B \cup C$, teda podľa definície množinovej inklúzie, že $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B \cup C)$. Ak $x \in A$ je ľubovolné, tak môžu nastať dve možnosti:

$$1. x \in A \setminus C \qquad 2. x \in C.$$

Ak $x \in A \setminus C$, tak z predpokladu máme $x \in B \setminus C$, potom zerejme $x \in B$ a teda $x \in B \cup C$.
Ak $x \in C$, tak je zrejmé, že $x \in B \cup C$.
2.$\Leftarrow$ Za predpokladu, že platí $A \subseteq B \cup C$, ukážeme, že platí $A \setminus C \subseteq B \setminus C$, teda podľa definície množinovej inklúzie, že $\forall x(x \in A \setminus C \Rightarrow x \in B \setminus C)$. Platí (pre ľubovolné x) $x \in A \setminus C$, a teda $x \in A \wedge x \notin C$, potom podľa predpokladu

$$[x \in B \cup C \wedge x \notin C] \Leftrightarrow [(x \in B \vee x \in C) \wedge x \notin C] \Leftrightarrow [x \in B \wedge x \notin C] \Leftrightarrow [x \in B \setminus C]$$

$\square$ b) $(A \cup B = A \cup C) \Leftrightarrow (B \setminus A = C \setminus A)$
Riešenie:
1.$\Rightarrow$ Za predpokladu, že platí $A \cup B = A \cup C$, ukážeme, že platí $B \setminus A = C \setminus A$. Najskôr ukážeme, že $B \setminus A \subseteq C \setminus A$. Nech x je ľubovolné. Potom, pretože podľa predpokladu platí $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \cup C$ a pretože $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$, tak

$$[x \in B \setminus A] \Leftrightarrow [x \in B \wedge x \notin A] \Rightarrow [x \in A \cup B \wedge x \notin A] \Leftrightarrow$$

$$[x \in A \cup C \wedge x \notin A] \Leftrightarrow [x \in C \wedge x \in A] \Leftrightarrow [x \in C \setminus A]$$

Inklúzia $C \setminus A \subseteq B \setminus A$ sa dokáže analogicky.
2.$\Leftarrow$ Za predpokladu, že platí $B \setminus A = C \setminus A$, ukážeme, že platí $A \cup B = A \cup C$. Najskôr ukážeme, že $A \cup B \subseteq A \cup C$. Nech x je ľubovolné. Ak $x \in A \cup B$, tak môžu nastať 2 možnosti:

$$1. x \in B \setminus A \qquad 2. x \in A.$$

Ak $x \in B \setminus A$, tak podľa predpokladu $x \in C \setminus A$, potom $x \in C$ a teda zrejme $x \in A \cup C$.
Ak $x \in A$, tak zrejme $x \in A \cup C$.
Inklúzia $A \cup C \subseteq A \cup B$ sa dokáže analogicky.
$\square$

Dokážte:
1. $X \setminus Y = \emptyset \Leftrightarrow X \subseteq Y$
2. $X \cup Y = \emptyset \Leftrightarrow [X = \emptyset \wedge Y = \emptyset]$

3. $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \emptyset \Leftrightarrow A = B$
4. $A \setminus B = A \cup B \Leftrightarrow B = \emptyset$
5. $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \Leftrightarrow B = \emptyset$
6. $A \setminus B \subseteq C \Leftrightarrow A \setminus C \subseteq B$
7. $(A \cup B) \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
8. $X \setminus Y = X \Leftrightarrow X \cap Y = \emptyset$.
9. $X \setminus Y = Y \Leftrightarrow [X = \emptyset \wedge Y = \emptyset]$
10. $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \cup B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
11. $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \emptyset$
12. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow A \subseteq C$

Dokážte matematickou indukciou:
1. $\forall n \geq 1 : \ \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^C$
2. $\forall n \geq 1 : \ \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^C$
3. $\forall n \geq 2 : \ \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup [A_2 \setminus A_1] \cup [A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)] \cup [A_4 \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)] \cup \ldots \cup [A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})]$

Dokážte:
1. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
2. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
3. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$
4. $A \subseteq B \Rightarrow \forall C (A \times C \subseteq B \times C)$
5. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$
6. $(A \neq \emptyset \wedge A \times B = A \times C) \Rightarrow B = C$

Zistite, ktoré z vlastností majú dané relácie (reflexívnosť, symetria, tranzitívnosť, asymetria (dohodneme sa, že to je $\forall x, y : x \sim y \Rightarrow y \nsim x$), antisymetria (dohodneme sa, že to je $\forall x, y : x \sim y \wedge y \sim x \Rightarrow x = y$). Ak je niektorá reláciou ekvivalencie, popíšte príslušný rozklad.
1. $x, y \in Z, \ x \sim y \Leftrightarrow x + y$ je párne
2. $x, y \in Z, \ x \sim y \Leftrightarrow x + y$ je nepárne
3. $x, y \in Z, \ x \sim y \Leftrightarrow xy$ je párne
4. $[x, y], [u, v] \in Z \times Z, \ [x, y] \sim [u, v] \Leftrightarrow x < u \wedge y < v$
5. $[x, y], [u, v] \in R \times R, \ [x, y] \sim [u, v] \Leftrightarrow x + 2y = u + 2v$
6. $[x, y], [u, v] \in R \times R, \ [x, y] \sim [u, v] \Leftrightarrow xy = uv$
7. $[x, y], [u, v] \in R \times R, \ [x, y] \sim [u, v] \Leftrightarrow xu = yv$
8. $[x, y], [u, v] \in R \times R, \ [x, y] \sim [u, v] \Leftrightarrow [x^2 + y^2] = [u^2 + v^2]$, kde $[a]$ znamená dolná celá časť a
9. $x, y \in Z, \ x \sim y \Leftrightarrow x/y$
10. $[x, y], [u, v] \in R \times R, \ [x, y] \sim [u, v] \Leftrightarrow max\{x, y\} = max\{u, v\}$

11. $[x, y], [u, v] \in R \times R,\ [x, y] \sim [u, v] \Leftrightarrow max\{|x|, |y|\} = max\{|u|, |v|\}$

Daná je množina $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dané relácie na A doplňte na relácie ekvivalencie. K daným rozkladom A nájdite príslušnú reláciu ekvivalencie.
1. $R_1 = \{[2, 2], [4, 4]\}$
2. $R_2 = \{[1, 3][1, 6], [2, 5]\}$
3. $R_3 = \{[1, 5], [2, 4], [3, 6]\}$
4. $S_1 = \{\{2, 3, 5\}, \{1\}, \{4, 6\}\}$
5. $S_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$
6. $S_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$
Koľko existuje relácii ekvivalencie na množine $\{\spadesuit, \blacklozenge, \clubsuit, \bigstar\}$?

Nech A je ľubovolná množina. Popíšte množiny ${}^{\emptyset}A, {}^{A}\emptyset$. Ktorá z množín obsahuje injekciu, surjekciu alebo bijekciu? Svoje tvrdenia dokážte.

Dokážte, že uvedené množiny sú ekvivalentné, t.j. nájdite medzi nimi bijektívne zobrazenie

$$M = (2, 3) \times \langle -1, 4) \qquad N = \{[x, y] \in R \times R \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$$

Množina N obsahuje všetky kružnice s polomerom $0 < r < 1$. Preto môžme zobraziť interval $(2, 3)$ do $(0, 1)$ takto $x \mapsto x - 2$. Každý bod kružnice s pevným polomerom r je jednoznačne určený uhlom z intervalu $\langle 0, 2\pi)$. Preto môžme zobraziť interval $\langle -1, 4)$ do $\langle 0, 2\pi)$. zobrazenie nesledovne $y \mapsto \frac{2\pi(y+1)}{5}$. Zobrazenie

$$[x, y] \mapsto [(x - 2)\cos\frac{2\pi(y + 1)}{5}, (x - 2)\sin\frac{2\pi(y + 1)}{5}]$$

je bijekcia $M \to N$.
16. Dokážte, že dané množiny A, B majú rovnaké mohutnosti.
a) $A = \langle 4, 8); B = (-1, 9\rangle$
b) $A = \langle 0, 1\rangle\,; B = (0, 1)$
c) $A = (5, 6); B = R$
d) $A = \langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle\,; B = \{[x, y] \in R \times R; x^2 + y^2 \leq 5\}$
e) $A = R; B = \{[x, y] \in R \times R; x^2 + (y - 1)^2 = 1\} \setminus \{[0, 2]\}$
f) $A = \{3k, k \in Z\}, B = N$
g) $A = \langle 0, 1); B = R$
h) $A = (0, 1\rangle; B = \langle 1, \infty)$
i) $A = \{[x, y] \in R \times R; x^2 + y^2 \leq 1\}; B = \{[x, y] \in R \times R; x^2 + y^2 < 2\}$
j) $A = (6, 11\rangle, B = \langle -1, 1) \cup (4, 5)$
k) $A = \langle -3, 3\rangle \setminus \{0\}, B = (-3, 3)\}$

V prípade nejasností, dajte vedieť mailom.