Diskrétna matematika I. – Cantor–Bernsteinova veta

Úplný dôkaz – na prednáške sa rozobrala iba jedna zo štyroch možností

Cantor–Bernsteinova veta: *Nech $f : A \to B$ a $g : B \to A$ sú injektívne zobrazenia medzi množinami A a B. Potom existuje bijekcia $h : A \to B$.*
(Iná formulácia: Nech A a B sú množiny. Ak platí $|A| \leq |B|$ a $|B| \leq |A|$, potom aj $|A| = |B|$.)

Nasledujúci dôkaz kopíruje dôkaz z knihy *Množiny a všeličo okolo nich*, s. 112–114 (staršie vydanie).

Dôkaz: Nech $X_0 = B - f(A)$. Potom máme dve možnosti: $X = \emptyset$ alebo $X \neq \emptyset$.
• V prvom prípade $f(A) = B$, zobrazenie f je surjekcia, a teda aj bijekcia. Sme hotoví.
• V druhom prípade f nie je bijekciou (v B nám zostala nepokrytá práve množina X_0) a musíme zobrazenie f nejako ‚vylepšiť', najlepšie pomocou g.
Označme $Y_0 = g(X_0)$ a $X_1 = f(Y_0)$. Takto môžme postupne definovať množiny $Y_n = g(X_n)$ a $X_{n+1} = f(Y_n)$. Ukazuje sa, že práve toto sú množiny, kde musíme pozmeniť zobrazenie f.
Položme:

$$A_2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n, \qquad A_1 = A - A_2,$$

$$B_2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n, \qquad B_1 = B - B_2.$$

Potom platia nasledujúce identity:

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset, \qquad A_1 \cup A_2 = A,$$

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset, \qquad B_1 \cup B_2 = B,$$

$$f(A_1) = B_1, \qquad g(B_2) = A_2.$$

Prvé štyri z nich sú pomerne zrejmé, vyplývajú priamo z definičných vzťahov. To, čo treba ukázať sú posledné dve identity.

1) ($f(A_1) \subseteq B_1$) Nech $x \in A_1$. Ak $f(x) = y$ nepatrí do B_1, musí nastať $y \in B_2$, teda $y \in X_n$ pre nejaké n. Nutne je $n > 0$, lebo $y = f(x) \notin X_0$. Keďže $X_n = f(Y_{n-1})$, existuje nejaké $z \in Y_{n-1}$ a $y = f(z)$. Potom ale máme:

$$x \in A_1, \quad f(x) = y,$$

$$z \in Y_{n-1} \subseteq A_2, \quad f(z) = y.$$

To je ale spor s predpokladanou injektivitou zobrazenia f.

2) ($B_1 \subseteq f(A_1)$) Nech $y \in B_1$. Potom $B - f(A) = X_0 \subseteq B_2 = B - B_1$. Teda $f(A) \supseteq B_1$ a existuje $x \in A$ také, že $y = f(x)$. Ak ukážeme, že $x \in A_1$, dostaneme $y = f(x) \in f(A_1)$ a sme hotoví.
Predpokladajme teda opak, čiže $x \in A_2$. Potom $x \in Y_n$ pre nejaké n. Dostávame $y = f(x) \in f(Y_n) = X_{n+1} \subseteq B_2$, čo je v spore s predpokladom $y \in B_1$.

3) ($g(B_2) \subseteq A_2$) Nech $x \in g(B_2)$. Potom existuje $y \in B_2$ také, že $x = g(y)$ a $y \in X_n$ pre nejaké n. Preto $x = g(y) \in g(X_n) = Y_n \subseteq A_2$.

4) ($A_2 \subseteq g(B_2)$) Ak $x \in A_2$, potom existuje n, pre ktoré $x \in Y_n$. Lenže $Y_n = g(X_n)$, čiže existuje $y \in X_n \subseteq B_2$, pre ktoré $x = g(y)$. Preto dostávame $x \in g(B_2)$.

Týmto sme ukázali množinové identity $f(A_1) = B_1$ a $g(B_2) = A_2$. Z toho vyplýva, že zúžené zobrazenia $f|_{A_1} : A_1 \to B_1$ a $g|_{B_2} : B_2 \to A_2$ sú bijekcie.
Definujme zobrazenie $h : A \to B$ ako:

$$h(x) = f(x) \qquad \text{pre} \quad x \in A_1,$$

$$h(x) = g^{-1}(x) \qquad \text{pre} \quad x \in A_2.$$

Dá sa ľahko presvedčiť že h je surjekcia a injekcia:
• keďže $h(A_1) = B_1$ a $h(A_2) = B_2$, dostaneme $h(A) = B$.

• zúžené zobrazenia $f|_{A_1}$ a $g|_{B_2}$ sú injekciami, a preto $h(x_1) \neq h(x_2)$ pre rôzne x_1, x_2 z A_i (i môže byť 1 alebo 2). Treba ešte overiť možnosť $x_1 \in A_1$ a $x_2 \in A_2$. Potom ale $h(x_1) \in B_1$ a $h(x_2) \in B_2$, čiže nutne ide o dve rôzne hodnoty.

Skonštruovali sme zobrazenie $h : A \to B$, ktoré je injektívne a surjektívne – teda hľadanú bijekciu medzi množinami A a B. $\square$