Diskrétna matematika I. – Veta o dôkaze rozborom prípadov

Úplný dôkaz – na prednáške sa spravila iba prvá časť

Veta o dôkaze rozborom prípadov: *Nech T je množina formúl výrokovej logiky a A, B, C sú formule výrokovej logiky. Potom $T, (A \vee B) \vdash C$ práve vtedy, ak súčasne platí $T, A \vdash C$ aj $T, B \vdash C$.*

Dôkaz: ($\Rightarrow$) Ak platí $T, (A \vee B) \vdash C$, použijeme tvrdenie $\vdash A \Rightarrow (A \vee B)$ dokázané na prednáške. Potom zrejme $T, A \vdash A \vee B$, a teda z predpokladu $T \vdash (A \vee B) \Rightarrow C$ vyplýva $T, A \vdash C$. Podobne postupujeme pre $T, B \vdash C$.

($\Leftarrow$) Nech súčasne platí $T, A \vdash C$ aj $T, B \vdash C$. Pomocou vety o dedukcii, (V3) [$\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$] a modus ponens dostaneme, že $T \vdash \neg C \Rightarrow \neg A$ a $T \vdash \neg C \Rightarrow \neg B$. Použijeme (V7) [$\vdash \neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \vee B))$] a dokážeme, že $T, \neg C \vdash \neg(A \vee B)$. Použitím Axiómy 3 dôjdeme k záveru $T \vdash (A \vee B) \Rightarrow C$.

Dôkazy (V3) a (V7) sú súčasťou domácej úlohy č. 4. $\square$