**Cvičenia z diskrétnej matematiky**

Dokážte!

1. Ak platia výroky $A \wedge \neg B; \neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A$, tak platí aj $A \Rightarrow B$.
2. Ak platia výroky $A \wedge \neg B; \neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$, tak platí aj $A \Rightarrow B$.
3. Ak platia výroky $\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow C; \neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg C$, tak platí aj $A \Rightarrow B$.
4. Ak platia výroky $A \vee B; (A \Rightarrow B) \Rightarrow C$, tak platí aj $A \Rightarrow C$.
5. Ak platia výroky $A \wedge \neg C; A \Rightarrow (B \vee C)$, tak platí aj $B \Rightarrow (A \vee C)$.
6. Ak platia výroky $A \vee B; A \Rightarrow (C \vee D); B \Rightarrow \neg D; C \Rightarrow \neg A$, tak platí aj $A \Rightarrow \neg B$.

Utvorte negácie nasledujúcich foriem:

1. $\forall x\ [a(x) \Rightarrow b(x)] \vee [\exists x\ \neg a(x) \wedge \exists x\ b(x)]$
2. $\exists x\ [a(x) \vee b(x)] \wedge [\forall x\ a(x) \Rightarrow \exists x\ \neg b(x)]$
3. $[\forall x\ a(x) \Rightarrow \exists x b(x)] \vee [\exists x\ \neg a(x) \wedge \forall x\ b(x)]$
4. $[\exists x\ \neg a(x) \Rightarrow \exists x\ \neg b(x)] \wedge \forall x\ [a(x) \Leftrightarrow b(x)]$

Dokážte, že pre ľubovolné výrokové formy $a(x), b(x)$ je nasledujúca kvantifikovaná forma je tautológia.

$$\forall x\ [a(x) \Rightarrow b(x)] \Rightarrow [\exists x\ a(x) \Rightarrow \exists x\ b(x)]$$

Dôkaz sporom. Predpokladajme, že by táto forma bola pre nejaké výrokové formy $a(x), b(x)$ definované na množine $M$ nepravdivá. Teda ľavá strana implikácie je pravdivá, t.j.

$$(\forall x\ [a(x) \Rightarrow b(x)]) \equiv 1 \tag{1}$$

a pravá strana implikácie je nepravdivá, t.j.

$$[\exists x\ a(x) \Rightarrow \exists x\ b(x)] \equiv 0. \tag{2}$$

z (2) podobne dostávame, že

$$[\exists x\ a(x)] \equiv 1 \tag{3}$$

a

$$[\exists x\ b(x)] \equiv 0. \tag{4}$$

Z (3) vyplýva, že môžme vybrať prvok $x^* \in M$ tak, že $[a(x^*)] \equiv 1$. Z (4) dostávame, že $[\forall x\ \neg b(x)] \equiv 1$. Pretože $\neg b(x)$ platí pre každý prvok z množiny $M$, platí aj pre $x^*$. Teda $[\neg b(x^*)] \equiv 1$ a z toho $[b(x^*)] \equiv 0$. Dostávame, že implikácia

$$a(x^*) \Rightarrow b(x^*)$$

je nepravdivá a to je spor s (1).

Zistite, či sú nasledujúce kvantifikované formuly tautológie. Ak áno, dokážte to, ak nie, nájdite kontrapríklad.

1.$\forall x\ [a(x) \Rightarrow b(x)] \Rightarrow [\forall x\ a(x) \Rightarrow \forall x\ b(x)]$
2.$\exists x\ [a(x) \Rightarrow b(x)] \Rightarrow [\forall x\ a(x) \Rightarrow \exists x\ b(x)]$
3.$\forall x\ [a(x) \Rightarrow b(x)] \Rightarrow [\exists x\ a(x) \Rightarrow \forall x\ b(x)]$
4.$\exists x\ [a(x) \Rightarrow b(x)] \Rightarrow [\exists x\ a(x) \Rightarrow \exists x\ b(x)]$
5.$\forall x\ [a(x) \Rightarrow b(x)] \Rightarrow [\forall x\ a(x) \Rightarrow \exists x\ b(x)]$
6.$\exists x\ [a(x) \Rightarrow b(x)] \Rightarrow [\exists x\ a(x) \Rightarrow \forall x\ b(x)]$
7.$\exists x\ [a(x) \Rightarrow b(x)] \Rightarrow [\forall x\ a(x) \Rightarrow \forall x\ b(x)]$
8. Zistite, či platia opačné implikácie.

Dokážte, že pre výrokovú formu dvoch premenných $a(x, y)$ platí

$$\exists x\ \forall y\ a(x, y) \Rightarrow \forall y\ \exists x\ a(x, y).$$

Dôkaz sporom. Nech $a(x, y)$ je forma definovaná na množine $M \times N$. Predpokladajme, že daná implikácia neplatí. Potom je jej ľavá strana pravdivá. t.j.

$$[\exists x\ \forall y\ a(x, y)] \equiv 1 \tag{5}$$

a jej pravá strana nepravdivá, t.j.

$$[\forall y\ \exists x\ a(x, y)] \equiv 0. \tag{6}$$

Z (6) máme, že $[\exists y\ \forall x\ \neg a(x, y)] \equiv 1$. Teda môžme vybrať prvok $y^* \in N$ tak, že forma $\forall x\ \neg a(x, y^*)$ je pravdivá, t.j.

$$[\forall x\ \neg a(x, y^*)] \equiv 1. \tag{7}$$

Z (5) vyplýva, že môžme vybrať prvok $x^* \in M$ tak, že

$$[\forall y\ a(x^*, y)] \equiv 1. \tag{8}$$

Pretože platí (8), forma $a(x^*, y)$ je pravdivá aj pre $y^*$. Teda

$$a(x^*, y^*) \equiv 1. \tag{9}$$

Podbne, pretože platí (7), forma $\neg a(x, y^*)$ je pravdivá aj pre $x^*$. Teda $\neg a(x^*, y^*) \equiv 1$ a to je spor s (9).

Dokážte, že platí:
1.$\exists y\ \forall x\ a(x, y) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ a(x, y)$
2.$\forall y\ \forall x\ a(x, y) \Rightarrow \forall x\ \exists y\ a(x, y)$
3.$\forall y\ \forall x\ a(x, y) \Rightarrow \exists x\ \forall y\ a(x, y)$
4.$\forall y\ \exists x\ a(x, y) \Rightarrow \exists x\ \exists y\ a(x, y)$

Nájdite množiny $M, N$ a výrokové formy $a(x, y)$, pre ktoré neplatí
1.$\exists y\ \forall x\ a(x, y) \Rightarrow \exists x\ \forall y\ a(x, y)$
2.$\exists y\ \exists x\ a(x, y) \Rightarrow \exists y\ \forall x\ a(x, y)$
3.$\forall y\ \exists x\ a(x, y) \Rightarrow \exists x\ \forall y\ a(x, y)$
4.$\exists y\ \forall x\ a(x, y) \Rightarrow \forall y\ \forall x\ a(x, y)$

Dokážte tvrdenia:
Pre každé prirodzené číslo $n$ platí
1. $5/n^5 - n$
2. $6/n^3 + 3n^2 + 2n$
3. $6/n^3 + 11n$
4. $5/2.11^n + 3$
5. $31/5^{n+1} + 6^{2n-1}$
6. $42/n^7 - n$
7. $9/n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$
8. $9/3.13^n + 8$
9. $13/3^{n+1} + 4^{2n-1}$
10. $5/8^n - 3^n$
11. $4/3^{2n-1} + 1$

12. $133/11^{n+1} + 12^{2n-1}$

Dokážte!
1. V rovine je $n$ priamok. Dokážte, že vzniknuté plochy možno ofarbiť čiernou a bielou farbou tak, že ľubovolné dve susedné plochy budú mať rôzne farby.
2.Dokážte, že každú sumu väčšiu ako 7 halierov možno zaplatiť trojhaliernikmi a päťhaliernikmi.
3. $n$ bodov v rovine, z ktorých žiedne tri neležie na tej istej priamke možno spojiť $\frac{1}{2}n(n-1)$ priamkami.
4. Majme $2n$ bodov ($n \geq 2$) v rovine, z ktorých žiadne tri neležia na tej istej priamke. Dokážte, že ak zostrojíme $n^2+1$ ľubovolných úsečiek s koncovými bodmi v týchto bodoch, tak vznikne aspoň jeden trojuholník s vrcholmi z pôvodnej množiny bodov.
5. Vypuklý n-uholník má $\frac{1}{2}n(n-3)$ uhlopriečok.

Daná je fibonacciho postupnosť

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\ \forall n \in N.$$

Dokážte nasledujúce jej vlastnosti :
1. $F_1F_2 + F_2F_3 + \cdots F_{2n}F_{2n+1} = F_{2n+1}^2 - 1\ \forall n \geq 1$
2. $2/F_{3n}\ \forall n \geq 1$
3. $3/F_{4n}\ \forall n \geq 1$
4. $1 < \frac{F_{n+1}}{F_n} < 2\ \forall n > 2$
5. Ak $x$ je koreňom rovnice $x^2 + x - 1 = 0$, tak $\forall n \geq 1\ x^{2n} = F_{2n-1} - xF_{2n}$

Nech $U$ je neprázdna množina a $A, B, C$ sú ľubovolné jej podmnožiny. Dokážte množinovú identitu:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Tereba ukázať, že $\forall x \in U\ [x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C]$. Nech $x$ je ľubovolný prvok $U$. Platí $x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee (x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C)$. Využili sme pritom, že disjunkcia je asociatívna logická operácia.

Dokážte: 1. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $(A \cap B) \subseteq A; (A \cap B) \subseteq B$
5. $A \subseteq (A \cup B); A \subseteq (A \cup B)$

Dokážte, že $A \cap \emptyset = \emptyset$.
Dôkaz sporom. Nech $A \subset U$ je ľubovolná a $A \cap \emptyset$ je neprázdna množina. Potom

$$\exists x\ x \in (A \cap B) \Rightarrow \exists x\ [x \in A \wedge x \in \emptyset] \Rightarrow [\exists x\ x \in A] \wedge \exists x[x \in \emptyset].$$

Tvrdenie $\exists x[x \in \emptyset]$ je zjavne nepravdivé a teda celá konjunkcia je nepravdivá. Dospeli sme k sporu.

Dokážte!
1. $(A^C)^C = A; A \cup \emptyset = A; A \cap A^C = \emptyset; A \cup A^C = U$
2. $A \cap (A \cup B) = A; A \cup (A \cap B) = A$

Ostatné množinové identity sa dajú nájsť v skriptách: Olejár, Škoviera: Diskrétna matematika 1. Na skúšku treba vedieť dokázať všetky z Vety2.2, Vety2.3.