

Dokážte nasledujúce tvrdenia.

1. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.
2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.
3. Dokážte, že $n(2n^2 + 1)$ je deliteľné tromi pre každé $n \in \mathbb{N}$.

Zistite či sú nasledujúce formuly tautológie:

4. $p \Rightarrow [(\neg q \wedge q) \Rightarrow r]$.
5. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Leftrightarrow p]$.
6. Rozhodnite či je nasledujúce tvrdenie pravdivé: „Ján ovláda logiku vtedy a len vtedy, ak nie je pravda, že nie je pravda, že Ján ovláda logiku”.
7. Rozhodnite či je nasledujúce tvrdenie pravdivé: „Ak je prirodzené číslo a deliteľné tromi, potom z faktu, že a nie je deliteľné tromi vyplýva, že a je deliteľné piatimi”.
8. Zapište formálne výrok „ n je najväčšie prirodzené číslo”, pričom môžete použiť existenčný a všeobecný kvantifikátor, reláciu *menší* (napr. $p < q$), reláciu rovnosti (napr. $p = q$) a logické spojky.
9. Zadefinujte logickú spojku *alebo* ($\vee$) pomocou *implikácie* ($\Rightarrow$) a *negácie* ($\neg$).

Bonusové príklady

10. Zadefinujte logickú spojku *a* ($\wedge$) pomocou spojky *alebo* ($\vee$) a *negácie* ($\neg$).
11. Dokážte, že iba s pomocou *ekvivalencie* ($\Leftrightarrow$) a *negácie* ($\neg$) nie je možné zdefinovať spojku *alebo* ($\vee$) ani spojku *a* ($\wedge$).