

Definujme postupnosť prirodzených čísel $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ nasledovne:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \quad \text{pre } n \geq 3.$$

(Dostaneme teda postupnosť čísel 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...) Táto postupnosť sa nazýva *Fibonacciho postupnosť*.

1. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ sú čísla F_n a F_{n+1} nesúdeliteľné.
2. Dokážte nasledovnú formulu pre Fibonacciho číslo F_n :

$$F_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}.$$

3. Dokážte nerovnosť: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n}$.
 4. Ukážte, že každý konvexný n -uholník sa dá rozdeliť na $n - 2$ neprekrývajúcich sa trojuholníkov. Odvoďte z toho formulu pre súčet uhlov v (konvexnom) n -uholníku.
 5. Majme v rovine n priamok vo všeobecnej polohe, t.j. žiadne dve z nich nie sú rovnobežné. Na koľko častí delia rovinu?
 6. Nájdite disjunktívnu normálnu formu pre výrok $p \wedge [q \vee (\neg p \wedge r)]$.
 7. Zapište v jazyku predikátovej logiky výrok: „ x dáva po delení štyrmi zvyšok 1 alebo 2”.
- V príkladoch č. 7 a 9 môžete použiť znaky pre operácie sčítania a násobenia, všeobecný a existenčný kvantifikátor, reláciu menší, predikát rovnosti a pod.
8. a) Ukážte, že „ $a \Rightarrow b$ ” je tautologickým dôsledkom výrokov „ $a \wedge \neg b$ ” a „ $\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a$ ”.
 - b) Ukážte: $\{(\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow c), (\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg c)\} \models a \Rightarrow b$.

Bonusové príklady

9. Zapište v jazyku predikátovej logiky výrok: „ x je prvočíslo”.
10. Ukážte, že každý (nie nutne konvexný) n -uholník sa dá rozdeliť na $n - 2$ neprekrývajúcich sa trojuholníkov.
11. Zdôvodnite, že nasledujúce tvrdenie je tautológiou:

$$(\exists x)(\forall y) \Phi(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x) \Phi(x, y).$$

Je aj nižšie uvedená obrátená implikácia tautológiou? *Pomôcka: skúste nájsť protipríklad.*

$$(\forall y)(\exists x) \Phi(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y) \Phi(x, y).$$