

1. Zistite či sú nasledujúce kvantifikované formule s ľubovoľnými predikátmi  $\Phi$ ,  $\Psi$  a  $A$  tautológie. Ak sú, dokážte to, ak nie sú, nájdite protipríklad:

- $(\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)) \Rightarrow ((\forall x) \Phi(x) \Rightarrow (\forall x) \Psi(x))$ ,
- $(\forall x)(\Phi(x) \wedge \Psi(x)) \Leftrightarrow ((\forall x) \Phi(x) \wedge (\forall x) \Psi(x))$ ,
- $((\exists x) \Phi(x) \wedge (\exists x) \Psi(x)) \Rightarrow (\exists x)(\Phi(x) \wedge \Psi(x))$ ,
- $(\exists x)(\Phi(x) \vee \Psi(x)) \Leftrightarrow ((\exists x) \Phi(x) \vee (\exists x) \Psi(x))$ ,
- $(\forall x)(\Phi(x) \vee \Psi(x)) \Rightarrow ((\forall x)\Phi(x) \vee (\forall x)\Psi(x))$ ,
- $(\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)) \Rightarrow (\exists x)\Phi(x)$ ,
- $(\forall x)(\forall y) A(x, y) \Rightarrow (\forall x) A(x, x)$ ,
- $(\exists x)(\exists y) A(x, y) \Rightarrow (\exists x) A(x, x)$ .

2. Hovoríme, že formula  $A$  je v *prenexnom* tvare, ak má tvar  $(Q_1x_1)(Q_2x_2)\dots(Q_nx_n)B$ , kde každé  $Q_i$  je kvantifikátor ( $\exists$  alebo  $\forall$ ),  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sú navzájom rôzne premenné a  $B$  neobsahuje žiadne kvantifikátory.

Nájdite formule v prenexnom tvare, ktoré sú ekvivalentné nasledujúcim formuliam:

- $(\forall x) \Phi(x) \wedge (\forall x) \Psi(x)$ ,
- $(\forall x) \Phi(x) \vee (\forall x) \Psi(x)$ ,
- $(\exists x) \Phi(x) \wedge (\forall x) \Psi(x)$ ,
- $(\exists x) \Phi(x) \vee (\exists x) \Psi(x)$ ,
- $(\exists x) \Phi(x) \Rightarrow (\exists x) \Psi(x)$ .