

Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 5

Cvičenia v týždni 22. októbra 2007

1. Zistite či sú nasledujúce kvantifikované formule s ľubovoľnými predikátmi Φ , Ψ a A tautológie. Ak sú, dokážte to, ak nie sú, nájdite protipríklad:

- a) $(\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)) \Rightarrow ((\forall x)\Phi(x) \Rightarrow (\forall x)\Psi(x)),$
- b) $(\forall x)(\Phi(x) \wedge \Psi(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)\Phi(x) \wedge (\forall x)\Psi(x)),$
- c) $((\exists x)\Phi(x) \wedge (\exists x)\Psi(x)) \Rightarrow (\exists x)(\Phi(x) \wedge \Psi(x)),$
- d) $(\exists x)(\Phi(x) \vee \Psi(x)) \Leftrightarrow ((\exists x)\Phi(x) \vee (\exists x)\Psi(x)),$
- e) $(\forall x)(\Phi(x) \vee \Psi(x)) \Rightarrow ((\forall x)\Phi(x) \vee (\forall x)\Psi(x)),$
- f) $(\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)) \Rightarrow (\exists x)\Phi(x),$
- g) $(\forall x)(\forall y) A(x, y) \Rightarrow (\forall x) A(x, x),$
- h) $(\exists x)(\exists y) A(x, y) \Rightarrow (\exists x) A(x, x).$

2. Hovoríme, že formula A je v *prenexnom* tvaru, ak má tvar $(Q_1x_1)(Q_2x_2) \dots (Q_nx_n)B$, kde každé Q_i je kvanitifikátor (\exists alebo \forall), x_1, x_2, \dots, x_n sú navzájom rôzne premenné a B neobsahuje žiadne kvanitifikátory.

Nájdite formule v prenexnom tvaru, ktoré sú ekvivalentné nasledujúcim formuliam:

- a) $(\forall x)\Phi(x) \wedge (\forall x)\Psi(x),$
- b) $(\forall x)\Phi(x) \vee (\forall x)\Psi(x),$
- c) $(\exists x)\Phi(x) \wedge (\forall x)\Psi(x),$
- d) $(\exists x)\Phi(x) \vee (\exists x)\Psi(x),$
- e) $(\exists x)\Phi(x) \Rightarrow (\exists x)\Psi(x).$