Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 8

Cvičenia v týždni 12. novembra 2007

---

1. Nech D je relácia ekvivalencie na množine A. Rozhodnite, či je $\overline{D}$ tiež reláciou ekvivalencie.

2. Nájdite reláciu, ktorá je symetrická a tranzitívna, ale nie je reflexívna. Alebo ukážte, že taká relácia neexistuje.

3. Koľko je všetkých relácií ekvivalencie na štvorprvkovej množine?

4. Na množine prirodzených čísel $\mathbb{N}$ definujeme reláciu R ako: aRb práve vtedy, ak a delí b alebo b delí a. Je R reláciou ekvivalencie?

5. Množiny $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sú množiny celých, racionálnych a reálnych čísel. Definujme relácie:

$$T = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x - y \in \mathbb{Z}\},$$
$$U = \{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x - y \in \mathbb{Q}\}.$$

Ukážte, že T a U sú relácie ekvivalencie. Opíšte rozklady množiny $\mathbb{R}$ definované týmito reláciami.

6. Označme ako $C(0, 1)$ množinu všetkých spojitých funkcií s hodnotami v $\mathbb{R}$ definovaných na intervale $[0, 1]$. Definujme:

$$[f, g] \in T \Leftrightarrow (\forall x)\, f(x) \leq g(x) \wedge (\exists y)\, f(y) < g(y).$$

Ukážte, že T je čiastočné (ostré) usporiadanie množiny $C(0, 1)$ (t.j. T nie je reflexívne lebo $[f, f] \notin T$, ale T je tranzitívne aj antisymetrické). Nájdite dva neporovnateľné prvky.

7. Ukážte, že množina všetkých relácií ekvivalencie na množine A (chápaných ako podmnožiny $A \times A$) je usporiadaná vzhľadom na inklúziu. Znázornite toto usporiadanie pomocou Hesseho diagramu pre relácie ekvivalencie na štvorprvkovej množine (príklad č. 4).

Bonusový príklad

8. Nech $\mathbb{Q}[x]$ je množina všetkých polynómov v premennej x s racionálnymi koeficientmi. Nech $A[x] = \mathbb{Q}[x] - \mathbb{Q}$ (množinový rozdiel), t.j. $A[x]$ je množina všetkých polynómov stupňa aspoň 1 v premennej x s racionálnymi koeficientmi. Definujme:

$$[f(x), g(x)] \in D \Leftrightarrow g(x) = f(x) \cdot q(x) \quad \text{pre nejaké} \quad q(x) \in A[x].$$

Dokážte, že D je čiastočné usporiadanie. Nájdite dva neporovnateľné prvky v $A[x]$.
Pozn.: Relácia D je akousi obdobou relácie deliteľnosti | na množine celých čísel $\mathbb{N}$.