Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 9

Cvičenia v týždni 19. novembra 2007

Hovoríme, že relácia R je:
reflexívna ak $(\forall x)\,[x,x] \in R$,
antireflexívna ak $(\forall x)\,[x,x] \notin R$,
symetrická ak $[x,y] \in R \Rightarrow [y,x] \in R$,
asymetrická ak $[x,y] \in R \Rightarrow [y,x] \notin R$,
antisymetrická ak $([x,y] \in R \wedge [y,x] \in R) \Rightarrow x = y$,
tranzitíva ak $([x,y] \in R \wedge [y,z] \in R) \Rightarrow [x,z] \in R$,
má vlastnosť *dichotómie* ak $(\forall x,y)([x,y] \in R \vee [y,x] \in R)$.

Zistite, ktoré z vlastností majú nasledujúce relácie:

1. Relácia R na $\mathbb{Z}$ definovaná $xRy \Leftrightarrow 3|(x-y)$.

2. Relácia R na $\mathbb{Z}$ definovaná $xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2$.

3. Relácia R na $\mathbb{C}$ definovaná $xRy \Leftrightarrow \operatorname{Re} x = \operatorname{Im} y$. ($\operatorname{Re} z$ označuje reálnu časť komplexného čísla z, $\operatorname{Im} z$ označuje jeho imaginárnu časť)

4. Relácia R na $\mathbb{Q}$ definovaná $xRy \Leftrightarrow x - y \notin Z$.

5. Relácia R na $\mathcal{P}(Y)$ definovaná $ARB \Leftrightarrow a \in A \cap B$, kde a je pevne zvolený prvok množiny Y.

6. Pre množiny A, B, C dokážte: $A - B \subseteq C \Leftrightarrow A - C \subseteq B$.

7. Koľko podmnožín množiny $\{1,2,3,4\}$ má párny počet prvkov? Na základe odpovede nájdite a dokážte formulu pre počet podmnožín množiny $\{1,2,\ldots,n\}$, ktoré majú párny počet prvkov.

8. Nájdite čiastočne usporiadanú množinu, ktorá má práve jeden maximálny prvok a nemá najväčší prvok.

9. Dokážte, že v lineárne usporiadanej množine je minimálny prvok aj najmenší.

Bonusové príklady

10. Dokážte, že ak v čiastočne usporiadanej množine existuje najväčší prvok, tak je jediným maximálnym prvkom.

11. Nech (X,R) je dobre usporiadaná množina. Nájdite nutnú a postačujúcu podmienku na to, aby aj $(X,\overline{R})$ bola dobre usporiadaná množina.