

1. Nech  $A = \{a, b, c\}$  a  $B = \{x, y\}$ . Nájdite nasledujúce zobrazenia (ak existujú):

- všetky injektívne z  $A$  do  $B$ , a všetky injektívne z  $B$  do  $A$ .
- všetky surjektívne z  $A$  do  $B$ , a všetky surjektívne z  $B$  do  $A$ .
- všetky bijektívne z  $A$  do  $B$ , a všetky bijektívne z  $B$  do  $A$ .

2. Vyplýva z toho, že zložené zobrazenie  $f \circ g$  je injektívne aj injektivita  $f$ ? Ako to je s injektivitou  $g$ ? Čo sa stane ak nahradíme v predchádzajúcich otázkach „injektivnosť“ pojmom „surjektívnosť“?

3. Nech  $A$  je konečná množina. Dokážte:

- Ak  $f : A \rightarrow A$  je injektívne, tak je aj surjektívne.
  - Ak  $f : A \rightarrow A$  je surjektívne, tak je aj injektívne.
- Platia takéto tvrdenia aj pre nekonečnú množinu (napr.  $\mathbb{N}$ )?

4. Nech  $f : A \rightarrow B$  je zobrazenie. Dokážte, že pre ľubovoľné  $X, Y \subseteq A$  platí:

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y),$$

$$f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y).$$

Pod  $f(X)$  tu rozumieme množinu  $\{y \in B \mid (\exists x \in X) y = f(x)\}$  – obraz množiny  $X$ , ktorú možno zapísať aj ako  $\{f(x) \mid x \in X\}$ .

Nájdite zobrazenie  $f$  a množiny  $X, Y$  tak, aby v poslednej inklúzii neplatila rovnosť.

5. Nájdite bijekciu medzi  $(0, 1)$  a  $\{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ .

6. Nech  $f : A \rightarrow B$  je zobrazenie. Dokážte, že pre ľubovoľné  $U, V \subseteq B$  platí:

$$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V),$$

$$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V).$$

Tu  $f^{-1}(Y)$  neoznačuje inverznú funkciu k  $f$ , ale množinu  $\{x \in A \mid f(x) \in Y\}$  – tzv. *vor* množiny  $Y$ .

7. Nájdite bijekciu medzi intervalmi:  $(0, 1)$ ,  $(0, \infty)$ .

8. Množinu všetkých zobrazení z  $X$  do  $Y$  označujeme ako  $Y^X = \{f \mid f \text{ je zobrazenie z } X \text{ do } Y\}$ . Ukážte, že pre neprázdnu množinu  $A$  platí:

- $A^\emptyset = \{\emptyset\}$ ,
- $\emptyset^A = \emptyset$ ,
- $\emptyset^\emptyset = \{\emptyset\}$ .

*Návod:* Zobrazenie z  $A$  do  $B$ , ako podmnožina kartézskeho súčinu  $A \times B$  má spĺňať nejaké vlastnosti. Ukážte, že v prípadoch a) a c) má takéto vlastnosti prázdna množina, v prípade b) taká podmnožina neexistuje.

### Bonusové príklady

9. Nájdite bijekciu medzi intervalmi:  $(0, 1)$ ,  $(0, 1)$ .

10. Nájdite injektívne zobrazenie z  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}$ .