Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 2

Cvičenia v týždni 6. októbra 2007

Definujme postupnosť prirodzených čísel $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ nasledovne:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \quad \text{pre} \quad n \geq 3.$$

(Dostaneme teda postupnosť čísel 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...) Táto postupnosť sa nazýva *Fibonacciho postupnosť*.

1. Dokážte, že každý štvrtý člen vo Fibonacciho postupnosti je deliteľný troma, t.j. $3|F_{4n}$.

2. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ sú čísla F_n a F_{n+1} nesúdeliteľné.

3. Dokážte nasledovnú formulu pre Fibonacciho číslo F_n:

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}.$$

4. Dokážte nerovnosť: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n}$.

5. Majme v rovine n priamok vo všeobecnej polohe, t.j. žiadne dve z nich nie sú rovnobežné, ani sa žiadne tri z nich nepretínajú v jednom bode. Na koľko častí delia rovinu?

6. Nájdite disjunktívnu normálnu formu pre výrok $p \wedge [q \vee (\neg p \wedge r)]$.

7. Zapíšte v jazyku predikátovej logiky výrok: „x dáva po delení piatimi zvyšok 1 alebo 2 ".

8. Zapíšte v jazyku predikátovej logiky výrok: „x je nepárne prvočíslo".

V príkladoch č. 7 a 8 môžete použiť znaky pre operácie sčítania a násobenia, všeobecný a existenčný kvantifikátor, reláciu menší, predikát rovnosti a pod.

9. Zdôvodnite, že nasledujúce tvrdenie je vždy pravdivé:

$$(\exists x)(\forall y)\, \Phi(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\, \Phi(x,y).$$

Je aj nižšieuvedená obrátená implikácia tautológiou? *Pomôcka: skúste nájsť protipríklad.*

$$(\forall y)(\exists x)\, \Phi(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)\, \Phi(x,y).$$

Pozn. $\Phi(x,y)$ je ľubovoľná predikátová funkcia, t.j. prvkom x, y priradí nejakú pravdivostnú hodnotu. Ako príklady môžu slúžiť predikáty "=", ">" a pod. Úlohou je zistiť, či sú dané výroky vždy pravdivé bez ohľadu na to, čo vlastne Φ zanamená, resp. aké objekty reprezentujú premenné x a y.

Bonusové príklady

10. Majme v priestore n rovín vo všeobecnej polohe, t.j. žiadne dve z nich nie sú rovnobežné, každá trojica rovín sa pretne práve v jednom bode a žiadne štyri sa nepretnú v jednom bode. Na koľko častí delia priestor? Ako by to bolo pre $(k-1)$-rozmerné nadroviny v k-rozmernom priestore $\mathbb{R}^k$?

11.* Ukážte, že každý (nie nutne konvexný) n-uholník sa dá rozdeliť na $n-2$ neprekrývajúcich sa trojuholníkov.