

Zopakujme si definície niektorých pojmov výrokovej logiky:

Hovoríme, že formula  $A$  je *tautologickým dôsledkom* množiny formúl  $T$ , ak pre každé ohodnotenie  $v$ , ktoré dáva  $v(B) = 1$  pre  $B \in T$ , platí aj  $v(A) = 1$ . Zapisujeme  $T \models A$ .

Nech  $T$  je množina výrokových formúl. Hovoríme, že postupnosť  $B_1, \dots, B_n$  je *dôkazom formule*  $A$  z *predpokladov*  $T$ , ak:

- 1)  $B_n$  je  $A$
- 2) Každé  $B_k$  pre  $k = 1, \dots, n$  je buď axiómou (A1), (A2) alebo (A3), alebo  $B_k$  patrí do  $T$ , alebo je  $B_k$  bezprostredným dôsledkom aplikácie pravidla modus ponens na nejaké dve formule z  $\{B_1, \dots, B_{k-1}\}$ .

Ak existuje dôkaz formule  $A$  z predpokladov  $T$  hovoríme, že  $A$  je *dokázateľná z predpokladov*  $T$ . Zapisujeme  $T \vdash A$ .

1. Ukážte:  $\{a \wedge \neg b, (\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow b)\} \models a \Rightarrow b$ .
2. a) Ukážte, že  $a \Rightarrow b$  je tautologickým dôsledkom formúl  $a \wedge \neg b$  a  $\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a$ .  
b) Ukážte:  $\{(\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow c), (\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg c)\} \models a \Rightarrow b$ .
3. Nech  $T$  je splniteľná množina formúl. Ukážte, že  $T \models A \Rightarrow B$  práve vtedy, keď  $T \cup \{A\} \models B$ .
4. Nech  $T$  je splniteľná množina formúl. Ukážte, že  $T \cup \{A \vee B\} \models C$  práve vtedy, keď platí súčasne  $T \cup \{A\} \models C$  a  $T \cup \{B\} \models C$ .
5. Ukážte, že formula  $\neg a$  je dokázateľná z predpokladov  $\{\neg(a \Rightarrow b), \neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a\}$ .
6. Nech  $D$  je ľubovoľná z axióm výrokovej logiky a  $E$  je ľubovoľná formula. Zostrojte dôkaz formule  $E \Rightarrow D$ .
7. Nech  $T$  je množina formúl a  $A, B, C$  sú ľubovoľné formule. Ukážte, že ak  $T \vdash A \Rightarrow B$  a  $T \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$  potom aj  $T \vdash A \Rightarrow C$ . Pomôcka: výjdite z (A2).

### Bonusové príklady

8. Ukážte, že formula  $a \Rightarrow b$  je dokázateľná z predpokladov  $\{\neg(a \Rightarrow b), \neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a\}$ . Pomôcka: ukážte, že  $\{\neg(a \Rightarrow b), \neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a\} \vdash \neg b \Rightarrow \neg a$  a použite (A3). Porovnajte s príkladom č. 2 a).
9. Nájdite dôkaz formule z predpokladov:  $\{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), B\} \vdash A \Rightarrow C$ .