

Zopakujme si axiomy výrokovej logiky a tri formule dokázané na prednáške:

- (A1) $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- (A2) $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
- (A3) $\vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
- (V0) $\vdash A \Rightarrow A$
- (V1) $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
- (V2) $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$

Dokážte platnosť nasledujúcich formúl (okrem axióm a pravidla modus ponens môžete použiť aj vetu o dedukcii a formule dokázané na prednáške, resp. v domácej úlohe):

1. (V2') $\vdash B \Rightarrow \neg\neg B$.
2. Pre formulu $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$ nájdite dôkaz, alebo zdôvodnite prečo je to nemožné.
3. (V4) $\vdash A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$.
4. (V3) $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$. Pomôcka: ukážte $A \Rightarrow B, \neg\neg A \vdash \neg\neg B$ pomocou (V2) a (V2').
5. $(\neg B \Rightarrow A) \vdash (\neg A \Rightarrow B)$.
6. (V7) $\vdash \neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \vee B))$. Pomôcka: použite definíciu $A \vee B := \neg A \Rightarrow B$, ukážte $\neg A \vdash (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ a použite (V3).

Bonusové príklady

7. (V8) $\vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$.
8. $\vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$.
9. $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$.