Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 5

Cvičenia v týždni 27. októbra 2008

---

1. Zistite či sú nasledujúce kvantifikované formule s ľubovoľnými predikátmi Φ, Ψ a A tautológie. Ak sú, dokážte to, ak nie sú, nájdite protipríklad:
a) $(\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)) \Rightarrow ((\forall x)\,\Phi(x) \Rightarrow (\forall x)\,\Psi(x))$,
b) $(\forall x)(\Phi(x) \wedge \Psi(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)\,\Phi(x) \wedge (\forall x)\,\Psi(x))$,
c) $((\exists x)\,\Phi(x) \wedge (\exists x)\,\Psi(x)) \Rightarrow (\exists x)(\Phi(x) \wedge \Psi(x))$,
d) $(\exists x)(\Phi(x) \vee \Psi(x)) \Leftrightarrow ((\exists x)\,\Phi(x) \vee (\exists x)\,\Psi(x))$,
e) $(\forall x)(\Phi(x) \vee \Psi(x)) \Rightarrow ((\forall x)\Phi(x) \vee (\forall x)\Psi(x))$,
f) $(\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)) \Rightarrow (\exists x)\Phi(x)$,
g) $(\forall x)(\forall y)\,A(x,y) \Rightarrow (\forall x)\,A(x,x)$,
h) $(\exists x)(\exists y)\,A(x,y) \Rightarrow (\exists x)\,A(x,x)$.

2. Hovoríme, že formula A je v *prenexnom* tvare, ak má tvar $(Q_1x_1)(Q_2x_2)\dots(Q_nx_n)B$, kde každé Q_i je kvanitifikátor ($\exists$ alebo $\forall$), $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú navzájom rôzne premenné a B neobsahuje žiadne kvantifikátory. Inými slovami, vo formuli v prenexnom tvare sú všetky kvantifikátory na jej začiatku.

V príklade 1b) sme ukázali, že formula $(\forall x)\,\Phi(x) \wedge (\forall x)\,\Psi(x)$ je ekvivalentná formuli $(\forall x)(\Phi(x) \wedge \Psi(x))$, ktorá je v prenexnom tvare. (Rozmyslite si prečo).

Nájdite formule v prenexnom tvare, ktoré sú ekvivalentné nasledujúcim formulám:
a) $(\forall x)\,\Phi(x) \vee (\forall x)\,\Psi(x)$,
b) $(\exists x)\,\Phi(x) \wedge (\forall x)\,\Psi(x)$,
c) $(\exists x)\,\Phi(x) \vee (\exists x)\,\Psi(x)$,
d) $(\exists x)\,\Phi(x) \Rightarrow (\exists x)\,\Psi(x)$.