Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 11

Cvičenia v týždni 15. decembra 2008

---

1. Označme $0 = |\emptyset|$ a $1 = |\{\emptyset\}|$. Ukážte, že pre každé kardinálne číslo p platí:
a) $p + 0 = p \cdot 1 = p$,
b) $p^0 = 0^0 = 1$,
c) $p^1 = p$.

2. Dokážte, že pre ľubovoľné kardinálne čísla p, q a r platí:
a) $p \leq q \Rightarrow pr \leq qr$,
b) $p \leq q \Rightarrow p^r \leq q^r$,
c) ak $r \neq 0$, potom $p \leq q \Rightarrow r^p \leq r^q$. Čo sa stane ak $r = 0$?

3. Zachová sa platnosť tvrdení v príklade č. 2, ak zameníme neostré nerovnosti za ostré?

4. Dokážte, že každý systém navzájom disjunktných intervalov je spočítateľný.

5. Označme $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ a $c = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ platí:
a) $c = nc = \aleph_0 c = cc = c^n = c^{\aleph_0}$,
b) $2^{\aleph_0} = n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c$,
c) $2^c = n^c = \aleph_0^c = c^c$.

6. Nech $A_1, A_2, \ldots$ sú také množiny, že pre každé n máme $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$. Môže sa stať že $A_1 \cap A_2 \cap \ldots = \emptyset$?

7. Dokážte, že existuje injekcia z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$. Existuje injekcia z množiny všetkých postupností s reálnymi hodnotami do $\mathbb{R}$? Vedeli by ste ju skonštruovať?

8. Ukážte, že množina všetkých konečných podmnožín množiny $\mathbb{N}$ je spočítateľná. Čo zlyhá, ak by sme sa pokúšali použiť diagonálny princíp na ukázanie toho, že je nespočítateľná?

Bonusové príklady

9. Nech $\mathcal{S}$ je taká trieda podmnožín $\mathbb{N}$, že pre každé $A, B \in \mathcal{S}$ máme $A \subset B$ alebo $B \subset A$. Môže byť $\mathcal{S}$ nespočítateľná?

10. Hovoríme, že postupnosť $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je *neklesajúca* ak $f(n+1) \geq f(n)$ pre všetky n a *nerastúca* ak $f(n+1) \leq f(n)$ pre všetky n. Je množina všetkých neklesajúcich funkcií spočítateľná alebo nespočítateľná? Ako je to s množinou nerastúcich funkcií?