

Diskrétna matematika I. – Vianočná sada úloh

Príprava na skúšku alebo príklady pre tých, ktorých ešte neopustil entuziazmus

1. Napíšte negácie nasledujúcich výrokov:

- (i) n je párne alebo m je násobkom 3,
- (ii) každé $x \in A$ je prvkom $A \cap B$,
- (iii) ak dnes neprší, potom nepadajú traktory.

2. Preložte význam nasledujúceho výroku do krátkej slovenskej vety (dá sa to na 5 slov) a tiež napíšte jeho negáciu v symbolickom jazyku. (V tomto príklade premenné m, n, a, b sú chápané ako kladné celé čísla, t.j. $\forall m$ znamená $\forall m \in \mathbb{N}^+$.)

$$(\forall m)(\exists n)(\forall a)(\forall b)[[n \geq m] \wedge [(a = 1) \vee (b = 1) \vee ((ab \neq n) \wedge (ab + 2 \neq n))]].$$

3. Daná je operácia $*$ na prirodzených číslach spĺňajúca:

- (i) $1 * n = n - 1$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$,
 - (ii) $m * 1 = (m - 1) * 2$ pre všetky $m \in \mathbb{N}, m > 1$,
 - (iii) $m * n = (m - 1) * (m * (n - 1))$ pre $m, n \in \mathbb{N}, m, n > 1$.
- Nájdite hodnotu $5 * 5$.

4. *Symetrický rozdiel* $A \Delta B$ množín A a B je definovaný ako $(A - B) \cup (B - A)$. Pomocou tabuľky pravdivostných hodnôt pre výroky $x \in A, x \in B, x \in C$ ukážte, že operácia Δ je asociatívna. Ďalej ukážte, že x patrí do $A \Delta (B \Delta C)$ práve vtedy, ak x patrí do nepárneho počtu z množín A, B, C . Použite toto pozorovanie na zostrojenie ďalšieho dôkazu, že Δ je asociatívna operácia.

5. Definujme binárnu operáciu $*$ na \mathbb{Z}^2 nasledujúcou formulou: $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + bc)$. Dokážte, že operácia $*$ je komutatívna a asociatívna. Nájdite predpis pre

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) * \cdots * (a_k, b_k).$$

6. Nech f je zobrazenie z reálnych čísel do reálnych čísel. Hovoríme, že f je *striktne rastúca funkcia* ak pre $x < y$ je aj $f(x) < f(y)$. Ukážte, že ak je f striktne rastúca, potom je injektívna. Musí nutne byť aj surjektívna? Predpokladajme, že f je bijektívna, $f(0) = 0$ a $f(1) = 1$. Vyplýva z toho, že f je striktne rastúca?

7. Ukážte, že množina všetkých iracionálnych čísel je nespočítateľná.

8. Nech A je nejaká nespočítateľná množina reálnych čísel a zobrazenie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je injektívne. Ukážte, že potom existuje iracionálne číslo $x \in A$ také, že aj $f(x)$ je iracionálne. Odvoďte z toho, že existuje dvojica iracionálnych čísel a, b takých, že a^b je racionálne. Nájdite konkrétny príklad takej dvojice.

9. Nech O je obdĺžnik, ktorý sa dá rozdeliť na menšie obdĺžniky, z ktorých každý ma aspoň jednu stranu celočíselnej dĺžky. Ukážte, že aj O má aspoň jednu stranu celočíselnej dĺžky.

10. Nech n je párne číslo a \mathcal{A} systém podmnožín množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ s vlastnosťou, že pre každé $A, B \in \mathcal{A}$ je počet prvkov $A \cap B$ párny (toto platí aj pre dvojicu $A = B$). Koľko množín môže \mathcal{A} obsahovať? Ako sa zmení odpoveď ak množiny v \mathcal{A} majú párny počet prvkov, ale pre $A \neq B$ je veľkosť prieniku $A \cap B$ nepárna?

11. Existuje nespočítateľný systém \mathcal{B} podmnožín \mathbb{N} taký, že pre (rôzne) $A, B \in \mathcal{B}$ je prienik $A \cap B$ konečný?

12. Dá sa uzavretý interval $\langle 0, 1 \rangle$ zapísať ako nekonečné spočítateľné zjednotenie disjunktných neprázdnych uzavretých intervalov?

13. Daných je n bodov v rovine, pričom neležia všetky na jednej priamke. Ukážte, že je možné nájsť priamku, na ktorej ležia práve dva z nich.

14. Nech $\langle a_i, b_i \rangle$ je uzavretý interval kladných reálnych čísel pre $i \in \mathbb{N}$. Predpokladajme, že $\sum_i (b_i - a_i) < \infty$. Vyplýva z toho, že existuje nejaké reálne číslo x také, že nx nepatrí do žiadneho intervalu $\langle a_i, b_i \rangle$ pre každé prirodzené n ?

15. Majme nekonečný spočítateľný kruh docentov, z ktorých každý má na hlave kolbúk. Kolbúky sú modré alebo červené a každý docent vidí kolbúky všetkých kolegov okrem toho svojho. V istom momente, musia docenti zakričať farbu svojho kolbúka. Dajú sa docentom dať také inštrukcie, aby sa, bez ohľadu na distribúciu farieb kolbúkov, pomýlilo iba konečne veľa docentov?