

Nasleduje riešenie 4. a 10. príkladu 2. sady napísané s dôrazom na kombinatorickú stránku problému, teda hlavne na prechod od rekurentných vzťahov sformulovaných v lemach 3 a 4 k uzavretým vzorcom. Dôkazy lemm 3 a 4 sa v jednom argumente asi trochu spoliehajú na geometrickú intuíciu. Najťažší prípad nadrovín v  $\mathbb{R}^k$  ponechávame na čitateľov.

## 2. sada/4. príklad

Majme v rovine  $n$  priamok vo všeobecnej polohe, t.j. žiadne dve z nich nie sú rovnobežné, ani sa žiadne tri z nich nepretínajú v jednom bode. Na koľko častí delia rovinu?

Riešenie. Pripomeňme si známy vzorec zo stredoškolskej kombinatoriky, ktorého ďalšie používanie nám umožní zrýchliť a zjednodušiť niektoré úvahy.

**Lema 1 (Pascalov vzorec)** Pre prirodzené čísla  $n, k$  platí  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ .

Ďalej sformulujeme zrejmé pozorovanie, ktoré je akoby „jednorozmernou analógiou“ vety 1 (veta 1 je riešením „dvojrozmernej“ 4. úlohy).

**Lema 2**  $n$  rôznych bodov ležiacich na jednej priamke rozdeľuje túto priamku na  $n + 1$  úsekov, „súvislých častí“ ( $n - 1$  úsečiek a dve polpriamky).

Požiadavku na rôznosť bodov v leme 2 by sme mohli chápať ako analógiu požiadavky na „všeobecnosť polohy“ priamok v 4. úlohe. Lemu 2 by sme mohli tiež formálne dokázať indukciou.

Nech  $O_n$  je počet častí, na ktoré delí rovinu  $n$  priamok vo všeobecnej polohe. Zjavne  $O_0 = 1, O_1 = 2, O_2 = 4, O_3 = 7$ .

**Lema 3**  $O_n = O_{n-1} + n$

Dôkaz. Zjavne  $n$ -tá priamka má (v súlade s podmienkami všeobecnej polohy)  $n - 1$  priesečníkov s predchádzajúcimi  $n - 1$  priamkami. Podľa lemy 2 týchto  $n - 1$  bodov rozdeľuje  $n$ -tú priamku na  $n$  úsekov ( $n - 2$  úsečiek a dve polpriamky), z ktorých každý je hranicou práve jednej novovzniknutej oblasti (a každá nová oblasť je ohraničená práve jedným z  $n$  úsekov  $n$ -tej priamky). Teda pridaním  $n$ -tej priamky pribudne k  $O_{n-1}$  „starým“ oblastiam ešte  $n$  „nových“, čo bolo treba dokázať.  $\square$  Teda

$$\begin{aligned} O_n &= O_{n-1} + n = O_{n-2} + n + (n - 1) = O_i + n + (n - 1) + \dots + (i + 1) = \\ &= O_0 + n + (n - 1) + \dots + 1 + 0 = 1 + n + (n - 1) + \dots + 1 + 0 = \\ &= \frac{n(n + 1)}{2} + 1, \end{aligned} \tag{1}$$

Platí teda

**Veta 1**

$$O_n = \binom{n+1}{2} + 1 \tag{2}$$

čo dokážeme matematickou indukciou s využitím lemy 3, alebo nahliadneme priamo.

Dôkaz 1. Matematickou indukciou. Overme najprv bázu indukcie. Naozaj  $O_0 = 1 + \binom{0+1}{2} = 1 + 0 = 1$ , keďže  $\binom{1}{2} = \binom{2}{2} - \binom{1}{1} = 1 - 1 = 0$  podľa Pascalovej formulky.

Pristúpme k indukčnému kroku. Indukčným predpokladom (IP) bude:  $O_{n-1} = \binom{n}{2} + 1$ .

Potom  $O_n \stackrel{\text{lema 3}}{=} O_{n-1} + n \stackrel{IP}{=} \binom{n}{2} + 1 + n = \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + 1 \stackrel{Pascal}{=} \binom{n+1}{2} + 1 \square$

Dôkaz 2. Počet úsekov (úsečiek a polpriamok), na ktoré je tých  $n$  priamok vo všeobecnej polohe rozdelených vzájomnými priesečníkmi, je vlastne

$$\text{počet priesečníkov} + \text{počet priamok} = \binom{n}{2} + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2} \quad (3)$$

podľa Pascalovej formulky.  $\square$  (V podstate sme len dali novú interpretáciu už spomínanej rovnosti 3.)

Teraz prejdime k zovšeobecneniu pre roviny deliace  $\mathbb{R}^3$ /nadroviny deliace  $\mathbb{R}^k$ .

## 2. sada/10. príklad

Majme v priestore  $n$  rovín vo všeobecnej polohe, t.j. žiadne dve z nich nie sú rovnobežné, každá trojica rovín sa pretne práve v jednom bode a žiadne štyri sa nepretnú v jednom bode. Na koľko častí delia priestor? Ako by to bolo pre  $(k-1)$ -rozmerné nadroviny v  $k$ -rozmernom priestore  $\mathbb{R}^k$ ?

Riešenie. Nech  $R_n$  je počet častí, na ktoré delí priestor  $\mathbb{R}^3$   $n$  rovín vo všeobecnej polohe. Zjavne  $R_0 = 1$ ,  $R_1 = 2$ ,  $R_2 = 4$ ,  $R_3 = 8$ .

**Lema 4**  $R_n = R_{n-1} + O_{n-1}$

Dôkaz. Zjavne na  $n$ -tej rovine (označme si ju ako  $N_n$ ) leží (v súlade s podmienkami všeobecnej polohy rovín)  $n-1$  priamok  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$  - prienikov  $n$ -tej roviny  $N_n$  s predchádzajúcimi  $n-1$  rovinami  $N_1, N_2, \dots, N_{n-1}$ , teda  $p_i = N_n \cap N_i$  pre  $1 \leq i \leq n-1$  (keďže v súlade s podmienkami všeobecnej polohy rovín roviny  $N_i$  a  $N_n$  nie sú rovnobežné). Týchto  $n-1$  priamok  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$  je vo všeobecnej polohe v zmysle úlohy 4, t.j. žiadne dve z nich nie sú rovnobežné ani sa žiadne tri z nich nepretínajú v jednom bode. Skutočne?

Keby totiž boli povedzme priamky  $p_i$  a  $p_j$  ( $1 \leq i, j \leq n-1$ ) rovnobežné,  $p_i \parallel p_j$ , tak by platilo  $\emptyset = p_i \cap p_j = (N_i \cap N_n) \cap (N_j \cap N_n) = N_i \cap N_j \cap N_n$ , teda tri roviny  $N_i, N_j, N_n$  sa nepretínajú (ani v jednom bode), čo je v rozpore s podmienkami všeobecnej polohy rovín.

A ak by sa tri priamky, povedzme  $p_i, p_j, p_k$  ( $1 \leq i, j, k \leq n-1$ ) pretínali v nejakom bode a ak by sa navyše ten bod volal  $B$ , tak by platilo  $B \in p_i \cap p_j \cap p_k$ , ale  $p_i \cap p_j \cap p_k = (N_i \cap N_n) \cap (N_j \cap N_n) \cap (N_k \cap N_n) = N_i \cap N_j \cap N_k \cap N_n \neq \emptyset$ , teda štyri roviny  $N_i, N_j, N_k, N_n$  sa pretínajú (aspoň v jednom bode, a to v  $B$ ), čo je v rozpore s podmienkami všeobecnej polohy rovín.

Týchto  $n-1$  priamok  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$  teda rozdeľuje  $n$ -tú rovinu na  $O_{n-1}$  „komponentov súvislostí“ (oblastí roviny v zmysle úlohy 4), z ktorých každý je

hranicou práve jednej novovzniknutej oblasti priestoru  $\mathbb{R}^3$  (a každá nová oblasť priestoru  $\mathbb{R}^3$  je ohraničená práve jednou z  $O_{n-1}$  oblastí  $n$ -tej roviny). Teda pridaním  $n$ -tej roviny pribudne k  $R_{n-1}$  „starým“ oblastiam ešte  $O_{n-1}$  „nových“, čo bolo treba dokázať.  $\square$

Teda opakovaným použitím lemy 4 napríklad

$$R_4 = R_3 + O_3 = R_2 + O_2 + O_3 = R_1 + O_1 + O_2 + O_3 = R_0 + O_0 + O_1 + O_2 + O_3 \quad (4)$$

**Lema 5**  $R_n = R_0 + \sum_{k=0}^{n-1} O_k$

Dôkaz. Matematickou indukciou. Bázou nech je  $n = 4$ , preň sme tvrdenie už ukázali rovnosťou 4. Pristúpme teda k ind. kroku. Indukčným predpokladom (IP) bude

$$R_n = R_0 + \sum_{k=0}^{n-1} O_k. \text{ Potom}$$

$$R_{n+1} \stackrel{\text{lema 4}}{=} R_n + O_n \stackrel{IP}{=} R_0 + \sum_{k=0}^{n-1} O_k + O_n = R_0 + \sum_{k=0}^n O_k, \text{ čím je dôkaz matematickou indukciou ukončený. } \square$$

Dosadiac do rovnosti v leme 5 za  $O_k$  výraz  $\binom{k+1}{2} + 1$  (čo možno podľa vety 1) a využijúc to, že  $R_0 = 1$  a  $\binom{1}{2} = 0$  podľa Pascalovej formuly dostávame

$$\begin{aligned} R_n &= R_0 + \sum_{k=0}^{n-1} O_k = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left( \binom{k+1}{2} + 1 \right) = \\ &= n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+1}{2} = \\ &= n + 1 + \sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \\ &= n + 1 + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

Ide vlastne o súčet čísla  $n+1$  s  $n-1$  číslami na diagonále Pascalovho trojuholníka. Počítajme teda s využitím toho, že  $\binom{2}{2} = \binom{3}{3}$  a Pascalovho vzorca:

$$\begin{aligned} &\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n}{2} = \\ &= \binom{3}{3} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n}{2} = \\ &= \binom{4}{3} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n}{2} = \\ &= \binom{5}{3} + \dots + \binom{n}{2} = \\ &= \binom{n}{3} + \binom{n}{2} = \\ &= \binom{n+1}{3} \end{aligned} \quad (6)$$

Ďalej teda uvedieme a dokážeme práve odvodenú kombinatorickú identitu, ktorá hovorí o súčte čísel na druhej diagonále Pascalovho trojuholníka.

**Lema 6** Pre prirodzené číslo  $n \geq 2$  platí  $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n}{2} = \sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$

Dôkaz. Matematickou indukciou. Overme bázu: Pre  $n = 2$  tvrdenie platí:  $LS = \binom{2}{2} = 1 = \binom{3}{3} = PS$ . Pristúpme teda k ind. kroku. Indukčným predpokladom (IP) bude:  $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n}{2} = \sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$ . Potom platí  $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} \stackrel{IP}{=} \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \stackrel{Pascal}{=} \binom{n+2}{3}$ , čo je tvrdenie pre  $n+1$ , čím je dôkaz matematickou indukciou ukončený.  $\square$

Teda podľa rovnosti 5 a lemy 6 máme dokázaný nasledujúci výsledok pre počet oblastí  $R_n$ , na ktoré delí priestor  $\mathbb{R}^3$   $n$  rovín vo všeobecnej polohe.

**Veta 2**

$$R_n = \binom{n+1}{3} + n + 1 = \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{1} \quad (7)$$

Alternatívnou cestou od rekurentného vzťahu v leme 4 k vete 2 bez explicitného počítania s kombinačnými číslami by bolo využitie vzorca z prvého cvičenia:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \text{ Spôsob, ktorý sme zvolili, však zároveň ukazuje}$$

cestu k ďalšiemu zovšeobecneniu: Označme  $T_n^k$  ako počet oblastí, na ktoré je rozdelený priestor  $\mathbb{R}^k$   $n$  nadrovinami. Zosumarizujme si formou ukazujúcou na možné zovšeobecnenie už dokázané výsledky z viet 1 a 2 a lemy 2:

$$\begin{aligned} T_n^1 &= (n+1) = \binom{n}{1} + \binom{n}{0} \\ T_n^2 &= O_n = \binom{n+1}{2} + 1 = \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{0} = \left(\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right) + \binom{n}{0} \\ T_n^3 &= R_n = \binom{n+1}{3} + n + 1 = \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{1} = \left(\binom{n}{3} + \binom{n}{2}\right) + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

Všeobecný prípad nadrovín v  $\mathbb{R}^k$  ponechávame na čitateľov. Načrtnime aspoň plán, ako by sa dalo postupovať:

✓ Najprv by sme sa mali pokúsiť sformulovať podmienky všeobecnej polohy  $n$  nadrovín v  $\mathbb{R}^k$  (s využitím vedomostí z lineárnej algebry a geometrie o dimenzii prienikov afinných nadrovín, resp. s využitím skúseností s riešením sústav lineárnych rovníc).

✓ Dokázať rekurentný vzťah analogický leme 4. V dôkaze využiť všetky podmienky všeobecnej polohy  $n$  nadrovín v  $\mathbb{R}^k$  (niektoré podmienky možno nastolí až tento dôkaz).

✓ Uhádnuť, ako vyzerá „uzavretý“ vzorec pre  $T_n^k$  a dokázať ho matematickou indukciou podľa  $k$ , dimenzie priestoru  $\mathbb{R}^k$ . V tejto indukcii nám môže pomôcť

zovšeobecnenie lemy 6: vzťah  $\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ .