Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 2

Cvičenia v týždni 5. októbra 2009

Definujme postupnosť prirodzených čísel $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ nasledovne:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \quad \text{pre} \quad n \geq 3.$$

(Dostaneme teda postupnosť čísel 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...) Táto postupnosť sa nazýva *Fibonacciho postupnosť.*

1. Dokážte, že každý štvrtý člen vo Fibonacciho postupnosti je deliteľný troma, t.j. $3|F_{4n}$.

2. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ sú čísla F_n a F_{n+1} nesúdeliteľné.

3. Dokážte nasledovnú formulu pre Fibonacciho číslo F_n:

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}.$$

4. Majme v rovine n priamok vo všeobecnej polohe, t.j. žiadne dve z nich nie sú rovnobežné, ani sa žiadne tri z nich nepretínajú v jednom bode. Na koľko častí delia rovinu?

5. Nájdite disjunktívnu normálnu formu pre výrok $p \wedge [q \vee (\neg p \wedge r)]$.

6. Zapíšte v jazyku predikátovej logiky výrok: „x je nepárne prvočíslo".
V tomto príklade môžete použiť znaky pre operácie sčítania a násobenia, všeobecný a existenčný kvantifikátor, reláciu menší, predikát rovnosti a pod.

Opakovanie z prednášky: hovoríme, že formula A je *tautologickým dôsledkom* množiny formúl T, ak pre každé ohodnotenie v, ktoré dáva $v(B) \equiv 1$ pre každé $B \in T$, platí aj $v(A) \equiv 1$. Zapisujeme $T \models A$.

7. Ukážte: $(\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow b) \models a \Rightarrow b$.

8. a) Ukážte, že $a \Rightarrow b$ je tautologickým dôsledkom formuly $\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a$.
b) Ukážte: $\{(\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow c), (\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg c)\} \models a \Rightarrow b$.

9. Nech T je splniteľná množina formúl. Ukážte, že $T \models A \Rightarrow B$ práve vtedy, keď $T \cup \{A\} \models B$.

Bonusové príklady

10. Majme v priestore n rovín vo všeobecnej polohe, t.j. žiadne dve z nich nie sú rovnobežné, každá trojica rovín sa pretne práve v jednom bode a žiadne štyri sa nepretnú v jednom bode. Na koľko častí delia priestor? Ako by to bolo pre $(k-1)$-rozmerné nadroviny v k-rozmernom priestore $\mathbb{R}^k$?

11.* Ukážte, že každý (nie nutne konvexný) n-uholník sa dá rozdeliť na $n-2$ neprekrývajúcich sa trojuholníkov.