Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 5

Cvičenia v týždni 26. októbra 2009

---

1. Zistite či sú nasledujúce kvantifikované formule s ľubovoľnými predikátmi Φ, Ψ a A tautológie. Ak sú, dokážte to, ak nie sú, nájdite protipríklad:
a) $(\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)) \Rightarrow ((\forall x)\, \Phi(x) \Rightarrow (\forall x)\, \Psi(x))$,
b) $(\forall x)(\Phi(x) \wedge \Psi(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)\, \Phi(x) \wedge (\forall x)\, \Psi(x))$,
c) $((\exists x)\, \Phi(x) \wedge (\exists x)\, \Psi(x)) \Rightarrow (\exists x)(\Phi(x) \wedge \Psi(x))$,
d) $(\exists x)(\Phi(x) \vee \Psi(x)) \Leftrightarrow ((\exists x)\, \Phi(x) \vee (\exists x)\, \Psi(x))$,
e) $(\forall x)(\Phi(x) \vee \Psi(x)) \Rightarrow ((\forall x)\Phi(x) \vee (\forall x)\Psi(x))$,
f) $(\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)) \Rightarrow (\exists x)\Phi(x)$,
g) $(\exists x)(\forall y)\, A(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\, A(x, y)$,
h) $(\forall y)(\exists x)\, A(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)\, A(x, y)$,
i) $(\forall x)(\forall y)\, A(x, y) \Rightarrow (\forall x)\, A(x, x)$,
j) $(\exists x)(\exists y)\, A(x, y) \Rightarrow (\exists x)\, A(x, x)$.
Pozn. $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ a $A(x, y)$ sú ľubovoľné predikáty, t.j. napríklad A priradí prvkom x, y nejakú pravdivostnú hodnotu. Ako príklady môžu slúžiť predikáty "=", ">" a pod. Úlohou je rozhodnúť, či sú dané výroky vždy pravdivé bez ohľadu na to, čo vlastne Φ, Ψ alebo A zanamená, resp. aké objekty reprezentujú premenné x a y.

2. Hovoríme, že formula A je v *prenexnom* tvare, ak má tvar $(Q_1 x_1)(Q_2 x_2) \ldots (Q_n x_n)B$, kde každé Q_i je kvanitifikátor ($\exists$ alebo $\forall$), $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú navzájom rôzne premenné a B neobsahuje žiadne kvantifikátory. Inými slovami, vo formuli v prenexnom tvare sú všetky kvantifikátory na jej začiatku.

V príklade 1b) sme ukázali, že formula $(\forall x)\, \Phi(x) \wedge (\forall x)\, \Psi(x)$ je ekvivalentná formuli $(\forall x)(\Phi(x) \wedge \Psi(x))$, ktorá je v prenexnom tvare. (Rozmyslite si prečo).

Nájdite formule v prenexnom tvare, ktoré sú ekvivalentné nasledujúcim formulám:
a) $(\forall x)\, \Phi(x) \vee (\forall x)\, \Psi(x)$,
b) $(\exists x)\, \Phi(x) \wedge (\forall x)\, \Psi(x)$,
c) $(\exists x)\, \Phi(x) \vee (\exists x)\, \Psi(x)$,
d) $(\exists x)\, \Phi(x) \Rightarrow (\exists x)\, \Psi(x)$.