Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 7

Cvičenia v týždni 9. novembra 2009

---

1. Ukážte, že platí množinová identita $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.

2. Pre množiny A, B dokážte: $(A \cup B) - (A \cap B) = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.

3. Ako vyzerá množina $\emptyset - (\emptyset - A)$?

Nech $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Pre každú podmnožinu $A \subseteq \mathcal{U}$ označujeme množinu $\mathcal{U} - A$ ako A^{c}. Dokážte nasledujúce identity:

4. $\emptyset^{\mathrm{c}} = \mathcal{U}$.

5. $\mathcal{U}^{\mathrm{c}} = \emptyset$.

6. $(A^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = A$.

7. $A \cup A^{\mathrm{c}} = \mathcal{U}$.

8. Graficky znázornite vlastnosti relácie inklúzie $\subset$ na potenčnej množine $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$. ($A \subset B$ ak $A \subseteq B$ a $A \neq B$)

Hovoríme, že relácia R je:
reflexívna ak $(\forall x)\,[x, x] \in R$,
symetrická ak $[x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R$,
tranzitíva ak $([x, y] \in R \wedge [y, z] \in R) \Rightarrow [x, z] \in R$,
Hovoríme, že relácia R na A je *reláciou ekvivalencie* ak je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

9. Majme reláciu $R = \{[a, b], [b, c], [d, e], [d, f]\}$ na množine $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Doplňte R tak, aby z nej vznikla relácia ekvivalencie a aby sme pridali čo najmenší počet usporiadaných dvojíc.

Bonusový príklad

10. Majme reláciu $\sim$ na množine komplexných čísel $\mathbb{C}$ danú nasledovne: $z_1 \sim z_2$ práve vtedy, keď $|z_1| = |z_2|$. Overte, že $\sim$ je reláciou ekvivalencie a popíšte tzv. triedy ekvivalencie $\tilde{z}$, t.j. množiny všetkých $z' \in \mathbb{C}$, pre ktoré $z \sim z'$. (Norma komplexného čísla $z = a + b \cdot i$ je daná ako $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.)