Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 10

Cvičenia v týždni 7. decembra 2009

---

1. Zoraďte všetky prvky množiny $\mathbb{Q}$ do prostej postupnosti. (T.j. každé racionálne číslo sa v postupnosti bude nachádzať práve raz).

2. Nájdite bijekciu medzi množinami $(0,1\rangle \times \langle 0,1)$ a $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.

3. Dokážte, že množina všetkých otvorených intervalov s koncami v racionálnych číslach je spočítateľná.

4. Dokážte, že množina všetkých otvorených intervalov s koncami v reálnych číslach je nespočítateľná.

5. Nech $A_1, A_2, \ldots$ sú také množiny, že pre každé n máme $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$. Môže sa stať že $A_1 \cap A_2 \cap \ldots = \emptyset$?

6. Ukážte, že množina všetkých konečných podmnožín množiny $\mathbb{N}$ je spočítateľná. Čo zlyhá, ak by sme sa pokúšali použiť diagonálny princíp na ukázanie toho, že je nespočítateľná?

7. Nájdite bijekciu medzi všetkými racionálnymi číslami a nenulovými racionálnymi číslami. Existuje taká bijekcia, ktorá zachováva usporiadanie (t.j. ak $x < y$, potom aj $f(x) < f(y)$)?

8. Dokážte, že každý systém navzájom disjunktných otvorených intervalov je spočítateľný.

Bonusové príklady

9. Ukážte, že v rovine nemôžeme mať nespočítateľne veľa po dvojiciach disjunktných otvorených diskov. (Otvorený disk so stredom v $[x_0, y_0]$ a polomerom $\varepsilon > 0$ je $D_\varepsilon[x_0, y_0] = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon\}$). Čo sa zmení ak nahradíme 'otvorené disky' 'kružnicami'?

10. Zostrojte funkciu $f : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$, ktorá na každom intervale nadobúda všetky možné hodnoty. Inými slovami, pre každé $0 \leq a < b \leq 1$ a každé $c \in \langle 0,1\rangle$ existuje x, také že $a < x < b$ a $f(x) = c$.