Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 3

Cvičenia v týždni 11. októbra 2010

Zopakujme si definície niektorých pojmov výrokovej logiky:

Hovoríme, že formula A je *tautologickým dôsledkom* množiny formúl T, ak pre každé ohodnotenie v, ktoré dáva $v(B) = 1$ pre $B \in T$, platí aj $v(A) = 1$. Zapisujeme $T \models A$.

Nech T je množina výrokových formúl. Hovoríme, že postupnosť $B_1, \dots, B_n$ je *dôkazom formule A z predpokladov T*, ak:
1) B_n je A
2) Každé B_k pre $k = 1, \dots, n$ je buď axiómou (A1), (A2) alebo (A3), alebo B_k patrí do T, alebo je B_k bezprostredným dôsledkom aplikácie pravidla modus ponens na nejaké dve formule z $\{B_1, \dots, B_{k-1}\}$.

Ak existuje dôkaz formule A z predpokladov T hovoríme, že A je *dokázateľná z predpokladov T*. Zapisujeme $T \vdash A$.

1. Nech T je splniteľná množina formúl. Ukážte, že $T \cup \{A \vee B\} \models C$ práve vtedy, keď platí súčasne $T \cup \{A\} \models C$ a $T \cup \{B\} \models C$.

2. Ukážte, že formula $\neg a$ je dokázateľná z predpokladov $\{\neg(a \Rightarrow b), \neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a\}$.

3. Nech D je ľubovoľná z axióm výrokovej logiky a E je ľubovoľná formula. Zostrojte dôkaz formule $E \Rightarrow D$.

4. Nech T je množina formúl a A, B, C sú ľubovoľné formule. Ukážte, že ak $T \vdash A \Rightarrow B$ a $T \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ potom aj $T \vdash A \Rightarrow C$. Pomôcka: výjdite z (A2).
Poznámka: Toto je vynechaná časť dôkazu Vety o dedukcii z prednášky, ktorá zostala ako cvičenie.

5. Ukážte, že formula $a \Rightarrow b$ je dokázateľná z predpokladu $\{\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a\}$. Pomôcka: ukážte, že $\{\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a\} \vdash a \Rightarrow (a \Rightarrow b)$ a použite (A2) a vetu z prednášky.
Porovnajte s príkladom č. 7 a) z minulej úlohy.

6. Nájdite dôkaz formule z predpokladov: $\{A \Rightarrow (B \Rightarrow C), B\} \vdash A \Rightarrow C$.

7. Pre formulu $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$ nájdite dôkaz alebo zdôvodnite prečo je to nemožné.