Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 5

Cvičenia v týždni 25. októbra 2010

---

1. Zistite či sú nasledujúce kvantifikované formule s ľubovoľnými predikátmi Φ, Ψ a A tautológie. Ak sú, dokážte to, ak nie sú, nájdite protipríklad:

a) $(\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)) \Rightarrow ((\forall x)\,\Phi(x) \Rightarrow (\forall x)\,\Psi(x))$,

b) $(\forall x)(\Phi(x) \wedge \Psi(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)\,\Phi(x) \wedge (\forall x)\,\Psi(x))$,

c) $((\exists x)\,\Phi(x) \wedge (\exists x)\,\Psi(x)) \Rightarrow (\exists x)(\Phi(x) \wedge \Psi(x))$,

d) $(\exists x)(\Phi(x) \vee \Psi(x)) \Leftrightarrow ((\exists x)\,\Phi(x) \vee (\exists x)\,\Psi(x))$,

e) $(\forall x)(\Phi(x) \vee \Psi(x)) \Rightarrow ((\forall x)\Phi(x) \vee (\forall x)\Psi(x))$,

f) $(\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)) \Rightarrow (\exists x)\Phi(x)$,

g) $(\exists x)(\forall y)\,A(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\,A(x,y)$,

h) $(\forall y)(\exists x)\,A(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)\,A(x,y)$,

i) $(\forall x)(\forall y)\,A(x,y) \Rightarrow (\forall x)\,A(x,x)$,

j) $(\exists x)(\exists y)\,A(x,y) \Rightarrow (\exists x)\,A(x,x)$.

Pozn. $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ a $A(x,y)$ sú ľubovoľné predikáty, t.j. napríklad A priradí prvkom x, y nejakú pravdivostnú hodnotu. Ako príklady môžu slúžiť predikáty "=", ">" a pod. Úlohou je rozhodnúť, či sú dané výroky vždy pravdivé bez ohľadu na to, čo vlastne Φ, Ψ alebo A zanamená, resp. aké objekty reprezentujú premenné x a y.

2. Hovoríme, že formula A je v *prenexnom* tvare, ak má tvar $(Q_1 x_1)(Q_2 x_2)\dots(Q_n x_n)B$, kde každé Q_i je kvanitifikátor ($\exists$ alebo $\forall$), $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú navzájom rôzne premenné a B neobsahuje žiadne kvantifikátory. Inými slovami, vo formuli v prenexnom tvare sú všetky kvantifikátory na jej začiatku.

V príklade 1b) sme ukázali, že formula $(\forall x)\,\Phi(x) \wedge (\forall x)\,\Psi(x)$ je ekvivalentná formuli $(\forall x)(\Phi(x) \wedge \Psi(x))$, ktorá je v prenexnom tvare. (Rozmyslite si prečo).

Nájdite formule v prenexnom tvare, ktoré sú ekvivalentné nasledujúcim formulám:

a) $(\forall x)\,\Phi(x) \vee (\forall x)\,\Psi(x)$,

b) $(\exists x)\,\Phi(x) \wedge (\forall x)\,\Psi(x)$,

c) $(\exists x)\,\Phi(x) \vee (\exists x)\,\Psi(x)$,

d) $(\exists x)\,\Phi(x) \Rightarrow (\exists x)\,\Psi(x)$.