Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 8

Cvičenia v týždni 22. novembra 2010

Hovoríme, že relácia R je:
reflexívna ak $(\forall x)\,[x,x] \in R$,
antireflexívna ak $(\forall x)\,[x,x] \notin R$,
symetrická ak $[x,y] \in R \Rightarrow [y,x] \in R$,
asymetrická ak $[x,y] \in R \Rightarrow [y,x] \notin R$,
antisymetrická ak $([x,y] \in R \wedge [y,x] \in R) \Rightarrow x = y$,
tranzitíva ak $([x,y] \in R \wedge [y,z] \in R) \Rightarrow [x,z] \in R$,
má vlastnosť *dichotómie* ak $(\forall x,y)([x,y] \in R \vee [y,x] \in R)$.

Zistite, ktoré z vlastností majú nasledujúce relácie:

1. Relácia R na $\mathbb{Z}$ definovaná $xRy \Leftrightarrow 3|(x-y)$.

2. Relácia R na $\mathbb{Z}$ definovaná $xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2$.

3. Relácia R na $\mathbb{Q}$ definovaná $xRy \Leftrightarrow x - y \notin \mathbb{Z}$.

4. Relácia R na $\mathcal{P}(Y)$ definovaná $ARB \Leftrightarrow a \in A \cap B$, kde a je pevne zvolený prvok množiny Y.

5. Nájdite reláciu, ktorá je symetrická a tranzitívna, ale nie je reflexívna. Alebo ukážte, že taká relácia neexistuje.

6. Koľko je všetkých relácií ekvivalencie na štvorprvkovej množine?

7. Na množine prirodzených čísel $\mathbb{N}$ definujeme reláciu R ako: aRb práve vtedy, ak a delí b alebo b delí a. Je R reláciou ekvivalencie?

8. Množiny $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sú množiny celých, racionálnych a reálnych čísel. Definujme relácie:

$$T = \{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x - y \in \mathbb{Z}\},$$

$$U = \{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x - y \in \mathbb{Q}\}.$$

Ukážte, že T a U sú relácie ekvivalencie. Opíšte rozklady množiny $\mathbb{R}$ definované týmito reláciami.

9. Označme ako $C(0,1)$ množinu všetkých spojitých funkcií s hodnotami v $\mathbb{R}$ definovaných na intervale $[0,1]$. Definujme:

$$[f,g] \in T \Leftrightarrow (\forall x)\, f(x) \leq g(x) \wedge (\exists y)\, f(y) < g(y).$$

Ukážte, že T je čiastočné (ostré) usporiadanie množiny $C(0,1)$ (t.j. T nie je reflexívne lebo $[f,f] \notin T$, ale T je tranzitívne aj antisymetrické). Nájdite dva neporovnateľné prvky.

10. Nájdite čiastočne usporiadanú množinu, ktorá má práve jeden maximálny prvok a nemá najväčší prvok.

11. Dokážte, že v lineárne usporiadanej množine je minimálny prvok aj najmenší.

Bonusové príklady

12. Nech $\mathbb{Q}[x]$ je množina všetkých polynómov v premennej x s racionálnymi koeficientmi. Nech $A[x] = \mathbb{Q}[x] - \mathbb{Q}$ (množinový rozdiel), t.j. $A[x]$ je množina všetkých polynómov stupňa aspoň 1 v premennej x s racionálnymi koeficientmi. Definujme:

$$[f(x), g(x)] \in D \Leftrightarrow g(x) = f(x) \cdot q(x) \quad \text{pre nejaké} \quad q(x) \in A[x].$$

Dokážte, že D je čiastočné usporiadanie. Nájdite dva neporovnateľné prvky v $A[x]$.

Pozn.: Relácia D je akousi obdobou relácie deliteľnosti $\mid$ na množine celých čísel $\mathbb{N}$.

13. Dokážte, že ak v čiastočne usporiadanej množine existuje najväčší prvok, tak je jediným maximálnym prvkom.