

1. Nech $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{x, y\}$. Nájdite nasledujúce zobrazenia (ak existujú):

- všetky injektívne z A do B , a všetky injektívne z B do A .
- všetky surjektívne z A do B , a všetky surjektívne z B do A .
- všetky bijektívne z A do B , a všetky bijektívne z B do A .

2. Vyplýva z toho, že zložené zobrazenie $f \circ g$ je injektívne aj injektivita f ? Ako to je s injektivitou g ? Čo sa stane ak nahradíme v predchádzajúcich otázkach „injektívnosť“ pojmom „surjektívnosť“?

3. Nech A je konečná množina. Dokážte:

- Ak $f : A \rightarrow A$ je injektívne, tak je aj surjektívne.
 - Ak $f : A \rightarrow A$ je surjektívne, tak je aj injektívne.
- Platia takéto tvrdenia aj pre nekonečnú množinu (napr. \mathbb{N})?

4. Nech $f : A \rightarrow B$ je zobrazenie. Dokážte, že pre ľubovoľné $X, Y \subseteq A$ platí:

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y),$$

$$f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y).$$

Pod $f(X)$ tu rozumieme množinu $\{y \in B \mid (\exists x \in X) y = f(x)\}$ – obraz množiny X , ktorú možno zapísať aj ako $\{f(x) \mid x \in X\}$.

Nájdite zobrazenie f a množiny X, Y tak, aby v poslednej inklúzii neplatila rovnosť.

5. Nájdite bijekciu medzi $\langle 0, 1 \rangle$ a $\{[x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

6. Nech $f : A \rightarrow B$ je zobrazenie. Dokážte, že pre ľubovoľné $U, V \subseteq B$ platí:

$$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V),$$

$$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V).$$

Tu $f^{-1}(Y)$ označuje množinu $\{x \in A \mid f(x) \in Y\}$ – tzv. *vzor* množiny Y .

7. Nájdite bijekciu medzi intervalmi: $(0, 1)$, $(0, \infty)$.

8. Množinu všetkých zobrazení z X do Y označujeme ako $Y^X = \{f \mid f \text{ je zobrazenie z } X \text{ do } Y\}$. Ukážte, že pre neprázdnu množinu A platí:

- $A^\emptyset = \{\emptyset\}$,
- $\emptyset^A = \emptyset$,
- $\emptyset^\emptyset = \{\emptyset\}$.

Návod: Zobrazenie z A do B , ako relácia, t.j. podmnožina kartézskeho súčinu $A \times B$ má spĺňať nejaké vlastnosti. Ukážte, že v prípadoch a) a c) má takéto vlastnosti prázdna množina, v prípade b) taká podmnožina neexistuje.

Bonusové príklady

9. Nájdite bijekciu medzi intervalmi: $(0, 1)$, $(0, 1)$.

10. Nájdite injektívne zobrazenie z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R} .