Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 2

Cvičenia v týždni 3. októbra 2011

---

1. Majme v rovine n priamok vo všeobecnej polohe, t.j. žiadne dve z nich nie sú rovnobežné, ani sa žiadne tri z nich nepretínajú v jednom bode. Na koľko častí delia rovinu?

2. Zapíšte formálne výrok „n je najväčšie prirodzené číslo", pričom môžete použiť existenčný a všeobecný kvantifikátor, reláciu *menší* (napr. $p < q$), reláciu rovnosti (napr. $p = q$) a logické spojky.

3. Zapíšte v jazyku predikátovej logiky výrok: „x je nepárne prvočíslo".
V tomto príklade môžete použiť znaky pre operácie sčítania a násobenia, všeobecný a existenčný kvantifikátor, reláciu menší, predikát rovnosti a pod.

4. Dokážte, že iba s pomocou *ekvivalencie* ($\Leftrightarrow$) a *negácie* ($\neg$) nie je možné zadefinovať spojku *alebo* ($\wedge$) ani spojku *a* ($\vee$).

Hovoríme, že formula je zapísaná v tzv. *disjunktívnej normálnej forme*, ak je disjunkciou (spojená spojkou "alebo") niekoľkých formulí, z ktorých každá je konjunkciou (spojená spojkou "a") prvotných formúl alebo ich negácií.
Príklad: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ je disjunktívnou normálnou formou pre $p \Rightarrow q$.

5. Nájdite disjunktívnu normálnu formu pre výrok $p \wedge [q \vee (\neg p \wedge r)]$.

Na prednáške sa zatiaľ nestihlo: hovoríme, že formula A je *tautologickým dôsledkom* množiny formúl T, ak pre každé ohodnotenie v, ktoré dáva $v(B) \equiv 1$ pre každé $B \in T$, platí aj $v(A) \equiv 1$. Zapisujeme $T \models A$.
Hovoríme, že nejaká množina formúl T je *splniteľná* ak existuje ohodnotenie v, ktoré ohodnotí všetky formuly v T pravdivo.

6. Ukážte: $(\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow b) \models a \Rightarrow b$.

7. a) Ukážte, že $a \Rightarrow b$ je tautologickým dôsledkom formuly $\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a$.
b) Ukážte: $\{(\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow c), (\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg c)\} \models a \Rightarrow b$.

8. Nech T je splniteľná množina formúl. Ukážte, že $T \models A \Rightarrow B$ práve vtedy, keď $T \cup \{A\} \models B$.

Bonusové príklady

9. Majme v priestore n rovín vo všeobecnej polohe, t.j. žiadne dve z nich nie sú rovnobežné, každá trojica rovín sa pretne práve v jednom bode a žiadne štyri sa nepretnú v jednom bode. Na koľko častí delia priestor? Ako by to bolo pre $(k-1)$-rozmerné nadroviny v k-rozmernom priestore $\mathbb{R}^k$?

10.* Ukážte, že každý (nie nutne konvexný) n-uholník sa dá rozdeliť na $n-2$ neprekrývajúcich sa trojuholníkov.