Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 3

Cvičenia v týždni 3. októbra 2011

Zopakujme si definície niektorých pojmov výrokovej logiky:

Hovoríme, že formula A je *tautologickým dôsledkom* množiny formúl T, ak pre každé ohodnotenie v, ktoré dáva $v(B) = 1$ pre všetky $B \in T$, platí aj $v(A) = 1$. Zapisujeme $T \models A$.

Zovšeobecnením dôkazu vo formálnom systéme výrokovej logiky je tzv. *dôkaz z predpokladov*:
Nech T je množina výrokových formúl. Hovoríme, že postupnosť $B_1, \dots, B_n$ je *dôkazom formule* A *z predpokladov* T, ak:
1) B_n je A
2) Každé B_k pre $k = 1, \dots, n$ je buď axiómou (A1), (A2) alebo (A3), alebo B_k patrí do T, alebo je B_k bezprostredným dôsledkom aplikácie pravidla modus ponens na nejaké dve formule z $\{B_1, \dots, B_{k-1}\}$.

Ak existuje dôkaz formule A z predpokladov T hovoríme, že A je *dokázateľná z predpokladov* T. Zapisujeme $T \vdash A$. Za T môžeme zobrať prázdnu množinu, potom hovoríme, že A je *dokázateľná*, značíme $\vdash A$.

DÚ 2, č. 8 Nech T je splniteľná množina formúl. Ukážte, že $T \models A \Rightarrow B$ práve vtedy, keď platí $T \cup \{A\} \models B$.

1. Nech T je splniteľná množina formúl. Ukážte, že $T \cup \{A \vee B\} \models C$ práve vtedy, keď platí súčasne $T \cup \{A\} \models C$ a $T \cup \{B\} \models C$.

2. Nech T je splniteľná množina formúl. Ukážte, že ak je množina formúl $T \cup \{\neg A\}$ nesplniteľná, potom $T \models A$. (opačná implikácia sa spravila na prednáške)

3. Overte, že nasledujúca postupnsť formúl je dôkazom formuly $A \Rightarrow A$. V každom kroku určite či sa jedná o axiómu (ktorú, aká substitúcia sa použila) alebo bezprostredný dôsledok použitia pravidla modus ponens (na ktoré výroky sa aplikovalo).
1. $A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$
2. $(A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$
3. $(A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$
4. $A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$
5. $A \Rightarrow A$

4. Ukážte, že formula $\neg a$ je dokázateľná z predpokladov $\{\neg(a \Rightarrow b), \neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a\}$, t.j. nájdite jej dôkaz v zmysle definície.

5. Nech D je ľubovoľná z axióm výrokovej logiky a E je ľubovoľná formula. Zostrojte dôkaz formule $E \Rightarrow D$.

6. Nech T je množina formúl a A, B, C sú ľubovoľné formule. Ukážte, že ak $T \vdash A \Rightarrow B$ a $T \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ potom aj $T \vdash A \Rightarrow C$. Pomôcka: výjdite z (A2).

7. Zdôvodnite prečo pre formulu $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$ nemôže existovať dôkaz. Pomôcka: musí byť každá z formúl tvoriacich dôkaz tautológia?

8. Ukážte, že formula $a \Rightarrow b$ je dokázateľná z predpokladu $\{\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a\}$. Pomôcka: ukážte, že $\{\neg(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg a\} \vdash a \Rightarrow (a \Rightarrow b)$ a použite (A2) a výsledok príkladu č. 3.
Porovnajte s príkladom č. 7 a) z minulej úlohy.