

1. Zoradte všetky prvky množiny \mathbb{Q} do prostej postupnosti. (T.j. každé racionálne číslo sa v postupnosti bude nachádzať práve raz).
2. Nájdite bijekciu medzi množinami $(0, 1) \times \langle 0, 1 \rangle$ a $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.
3. Dokážte, že množina všetkých otvorených intervalov s koncami v racionálnych číslach je spočítateľná.
4. Dokážte, že množina všetkých otvorených intervalov s koncami v reálnych číslach je nespočítateľná.
5. Nech A_1, A_2, \dots sú také množiny, že pre každé n máme $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$. Môže sa stať že $A_1 \cap A_2 \cap \dots = \emptyset$?
6. Ukážte, že množina všetkých konečných podmnožín množiny \mathbb{N} je spočítateľná. Čo zlyhá, ak by sme sa pokúšali použiť diagonálny princíp na ukázanie toho, že je nespočítateľná?
7. Nájdite bijekciu medzi všetkými racionálnymi číslami a nenulovými racionálnymi číslami. Existuje taká bijekcia, ktorá zachováva usporiadanie (t.j. ak $x < y$, potom aj $f(x) < f(y)$)?
8. Dokážte, že každý systém navzájom disjunktných otvorených intervalov je spočítateľný.
9. Ukážte, že v rovine nemôžeme mať nespočítateľne veľa po dvojiciach disjunktných otvorených diskov. (Otvorený disk so stredom v $[x_0, y_0]$ a polomerom $\varepsilon > 0$ je $D_\varepsilon[x_0, y_0] = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon\}$). Čo sa zmení ak nahradíme 'otvorené disky' 'kružnicami'?

Bonusové príklady

10. Uvažujme rozklad množiny $(0, 1)$ zodpovedajúci relácii ekvivalencie $\sim : x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Ukážte, že tried rozkladu je nespočítateľne veľa. Existuje bijekcia medzi množinou tried a $(0, 1)$?
11. Zostrojte funkciu $f : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, ktorá na každom intervale nadobúda všetky možné hodnoty. Inými slovami, pre každé $0 \leq a < b \leq 1$ a každé $c \in \langle 0, 1 \rangle$ existuje x , také že $a < x < b$ a $f(x) = c$.