

**Cantor–Bernsteinova veta:** *Nech  $f : A \rightarrow B$  a  $g : B \rightarrow A$  sú injektívne zobrazenia medzi množinami  $A$  a  $B$ . Potom existuje bijekcia  $h : A \rightarrow B$ .*

*(Iná formulácia: Nech  $A$  a  $B$  sú množiny. Ak platí  $|A| \leq |B|$  a  $|B| \leq |A|$ , potom aj  $|A| = |B|$ .)*

Nasledujúci dôkaz kopíruje dôkaz z knihy *Množiny a všeličo okolo nich*, s. 112–114 (starsie vydanie).

*Dôkaz:* Nech  $X_0 = B - f(A)$ . Potom máme dve možnosti:  $X = \emptyset$  alebo  $X \neq \emptyset$ .

- V prvom prípade  $f(A) = B$ , zobrazenie  $f$  je surjekcia, a teda aj bijekcia. Sme hotoví.
- V druhom prípade  $f$  nie je bijekciou (v  $B$  nám zostala nepokrytá práve množina  $X_0$ ) a musíme zobrazenie  $f$  nejakým spôsobom „vylepšiť“, najlepšie pomocou  $g$ .

Označme  $Y_0 = g(X_0)$  a  $X_1 = f(Y_0)$ . Takto môžeme postupne definovať množiny  $Y_n = g(X_n)$  a  $X_{n+1} = f(Y_n)$ . Ukazuje sa, že práve toto sú množiny, kde musíme pozmeniť zobrazenie  $f$ .

Položme:

$$A_2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n, \quad A_1 = A - A_2,$$

$$B_2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n, \quad B_1 = B - B_2.$$

Potom platia nasledujúce identity:

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad A_1 \cup A_2 = A,$$

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset, \quad B_1 \cup B_2 = B,$$

$$f(A_1) = B_1, \quad g(B_2) = A_2.$$

Prvé štyri z nich sú pomerne zrejmé, vyplývajú priamo z definičných vzťahov. To, čo treba ukázať sú posledné dve identity.

1) ( $f(A_1) \subseteq B_1$ ) Nech  $x \in A_1$ . Ak  $f(x) = y$  nepatrí do  $B_1$ , musí nastať  $y \in B_2$ , teda  $y \in X_n$  pre nejaké  $n$ . Nutne je  $n > 0$ , lebo  $y = f(x) \notin X_0$ . Keďže  $X_n = f(Y_{n-1})$ , existuje nejaké  $z \in Y_{n-1}$  a  $y = f(z)$ . Potom ale máme:

$$x \in A_1, \quad f(x) = y,$$

$$z \in Y_{n-1} \subseteq A_2, \quad f(z) = y.$$

To je ale spor s predpokladanou injektivitou zobrazenia  $f$ .

2) ( $B_1 \subseteq f(A_1)$ ) Nech  $y \in B_1$ . Potom  $B - f(A) = X_0 \subseteq B_2 = B - B_1$ . Teda  $f(A) \supseteq B_1$  a existuje  $x \in A$  také, že  $y = f(x)$ . Ak ukážeme, že  $x \in A_1$ , dostaneme  $y = f(x) \in f(A_1)$  a sme hotoví.

Predpokladajme teda opak, čiže  $x \in A_2$ . Potom  $x \in Y_n$  pre nejaké  $n$ . Dostávame  $y = f(x) \in f(Y_n) = X_{n+1} \subseteq B_2$ , čo je v spore s predpokladom  $y \in B_1$ .

3) ( $g(B_2) \subseteq A_2$ ) Nech  $x \in g(B_2)$ . Potom existuje  $y \in B_2$  také, že  $x = g(y)$  a  $y \in X_n$  pre nejaké  $n$ . Preto  $x = g(y) \in g(X_n) = Y_n \subseteq A_2$ .

4) ( $A_2 \subseteq g(B_2)$ ) Ak  $x \in A_2$ , potom existuje  $n$ , pre ktoré  $x \in Y_n$ . Lenže  $Y_n = g(X_n)$ , čiže existuje  $y \in X_n \subseteq B_2$ , pre ktoré  $x = g(y)$ . Preto dostávame  $x \in g(B_2)$ .

Týmto sme ukázali množinové identity  $f(A_1) = B_1$  a  $g(B_2) = A_2$ . Z toho vyplýva, že zúžené zobrazenia  $f|_{A_1} : A_1 \rightarrow B_1$  a  $g|_{B_2} : B_2 \rightarrow A_2$  sú bijekcie.

Definujme zobrazenie  $h : A \rightarrow B$  ako:

$$h(x) = f(x) \quad \text{pre } x \in A_1,$$

$$h(x) = g^{-1}(x) \quad \text{pre } x \in A_2.$$

Dá sa ľahko presvedčiť, že  $h$  je surjekcia a injekcia:

- keďže  $h(A_1) = B_1$  a  $h(A_2) = B_2$ , dostaneme  $h(A) = B$ .

• zúžené zobrazenia  $f|_{A_1}$  a  $g|_{B_2}$  sú injekciami, a preto  $h(x_1) \neq h(x_2)$  pre rôzne  $x_1, x_2$  z  $A_i$  ( $i$  môže byť 1 alebo 2). Treba ešte overiť možnosť  $x_1 \in A_1$  a  $x_2 \in A_2$ . Potom ale  $h(x_1) \in B_1$  a  $h(x_2) \in B_2$ , čiže nutne ide o dve rôzne hodnoty.

Skonstruovali sme zobrazenie  $h : A \rightarrow B$ , ktoré je injektívne a surjektívne – teda hľadanú bijekciu medzi množinami  $A$  a  $B$ .  $\square$