Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 5

Cvičenia v týždni 22. októbra 2012

---

1. Zistite či sú nasledujúce kvantifikované formule s ľubovoľnými predikátmi Φ, Ψ a A tautológie. Ak sú, dokážte to, ak nie sú, nájdite protipríklad:
a) $(\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)) \Rightarrow ((\forall x)\,\Phi(x) \Rightarrow (\forall x)\,\Psi(x))$,
b) $(\forall x)(\Phi(x) \wedge \Psi(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)\,\Phi(x) \wedge (\forall x)\,\Psi(x))$,
c) $((\exists x)\,\Phi(x) \wedge (\exists x)\,\Psi(x)) \Rightarrow (\exists x)(\Phi(x) \wedge \Psi(x))$,
d) $(\exists x)(\Phi(x) \vee \Psi(x)) \Leftrightarrow ((\exists x)\,\Phi(x) \vee (\exists x)\,\Psi(x))$,
e) $(\forall x)(\Phi(x) \vee \Psi(x)) \Rightarrow ((\forall x)\Phi(x) \vee (\forall x)\Psi(x))$,
f) $(\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)) \Rightarrow (\exists x)\Phi(x)$,
g) $(\exists x)(\forall y)\,A(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\,A(x,y)$,
h) $(\forall y)(\exists x)\,A(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)\,A(x,y)$,
i) $(\forall x)(\forall y)\,A(x,y) \Rightarrow (\forall x)\,A(x,x)$,
j) $(\exists x)(\exists y)\,A(x,y) \Rightarrow (\exists x)\,A(x,x)$.
Pozn. $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ a $A(x,y)$ sú ľubovoľné predikáty, t.j. napríklad A priradí prvkom x, y nejakú pravdivostnú hodnotu. Ako príklady môžu slúžiť predikáty "$=$", "$>$" a pod. Úlohou je rozhodnúť, či sú dané výroky vždy pravdivé bez ohľadu na to, čo vlastne Φ, Ψ alebo A znamená, resp. aké objekty reprezentujú premenné x a y.

Napríklad v 1a) môžeme zvoliť $\Phi(x) =$ "auto x je červené" a $\Psi(x) =$"auto x má štyri kolesá". Potom kvantifikovaný výrok $(\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)) \Rightarrow ((\forall x)\,\Phi(x) \Rightarrow (\forall x)\,\Psi(x))$ hovorí:
"Ak pre každé auto platí: je červené $\Rightarrow$ má štyri kolesá, potom ak sú všetky autá červené, tak majú všetky autá štyri kolesá."
Čo síce znie pravdivo, ale nič nedokazuje. Jeden príklad totiž nedokazuje, že niečo platí vždy.
Dokázať že tento výrok je tautológia, bez ohľadu na význam predikátov Φ a Ψ, musíme trochu inak. Treba sa pozrieť, či by tento výrok mohol byť ohodnotený nepravdivo a dôjsť k sporu.
Mali by sme totiž:

$$v((\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x))) \equiv 1, \qquad \text{a} \qquad v(((\forall x)\,\Phi(x) \Rightarrow (\forall x)\,\Psi(x))) \equiv 0,$$

teda

$$v((\forall x)\,\Phi(x)) \equiv 1 \qquad \text{a} \qquad v((\forall x)\,\Psi(x)) \equiv 0.$$

Z posledného vieme $v((\exists x)\,\neg\Psi(x)) \equiv 1$, teda pre nejaké x_0 máme $v(\Psi(x_0)) \equiv 0$. Zároveň vieme (prečo?), že $v(\Phi(x_0)) \equiv 1$, a teda $v(\Phi(x_0) \Rightarrow \Psi(x_0))) \equiv 0$, čo je spor s $v((\forall x)(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x))) \equiv 1$.

2. Hovoríme, že formula A je v *prenexnom* tvare, ak má tvar $(Q_1 x_1)(Q_2 x_2)\dots(Q_n x_n)B$, kde každé Q_i je kvanitifikátor ($\exists$ alebo $\forall$), $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú navzájom rôzne premenné a B neobsahuje žiadne kvantifikátory. Inými slovami, vo formuli v prenexnom tvare sú všetky kvantifikátory na jej začiatku.
V príklade 1b) sme ukázali, že formula $(\forall x)\,\Phi(x) \wedge (\forall x)\,\Psi(x)$ je ekvivalentná formuli $(\forall x)(\Phi(x) \wedge \Psi(x))$, ktorá je v prenexnom tvare. (Rozmyslite si prečo).
Nájdite formule v prenexnom tvare, ktoré sú ekvivalentné nasledujúcim formulám:
a) $(\forall x)\,\Phi(x) \vee (\forall x)\,\Psi(x)$,
b) $(\exists x)\,\Phi(x) \wedge (\forall x)\,\Psi(x)$,
c) $(\exists x)\,\Phi(x) \vee (\exists x)\,\Psi(x)$,
d) $(\exists x)\,\Phi(x) \Rightarrow (\exists x)\,\Psi(x)$.