Diskrétna matematika I. – Domáca úloha č. 12

Cvičenia v týždni 16. decembra 2013

---

1. Označme $0 = |\emptyset|$ a $1 = |\{\emptyset\}|$. Ukážte, že pre každé kardinálne číslo p platí:
a) $p + 0 = p \cdot 1 = p$,
b) $p^0 = 0^0 = 1$,
c) $p^1 = p$.
(nezabudnite, že rovnosť kardinánych čísel zodpovedá nejkej bijekcii, sčítanie disjunktnému zjednoteniu, súčin kartézskemu súčinu a umocňovanie súvisí so zobrazeniami)

2. Dokážte, že pre ľubovoľné kardinálne čísla p, q a r platí:
a) $p \leq q \Rightarrow pr \leq qr$,
b) $p \leq q \Rightarrow p^r \leq q^r$,
c) ak $r \neq 0$, potom $p \leq q \Rightarrow r^p \leq r^q$. Čo sa stane ak $r = 0$?

3. Zachová sa platnosť tvrdení v príklade č. 4, ak zameníme neostré nerovnosti za ostré?

Pre nekonečné kardinálne čísla platia trochu iné vzťahy, ako by sme čakali:
Napríklad $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, lebo $\mathbb{N}_0 \cup -\mathbb{N} = \mathbb{Z}$. Podobne $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, lebo $|\mathbb{N}||\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$.

4. Označme $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ a $c = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. Použitím nerovností z príkladu 2 a vzťahov spomenutých na prednáške ukážte, že pre každé prirodzené číslo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ platí:
a) $c \leq nc \leq \aleph_0 c \leq cc \leq c^n \leq c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = c$,
b) $2^{\aleph_0} = n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c$,
c) $2^c = n^c = \aleph_0^c = c^c$.

5. Ukážte, že množina všetkých iracionálnych čísel je nespočítateľná.

Bonusové príklady

6. Nech A je nejaká nespočítateľná množina reálnych čísel a zobrazenie $f : A \to \mathbb{R}$ je injektívne. Ukážte, že potom existuje iracionálne číslo $x \in A$ také, že aj $f(x)$ je iracionálne. Odvoďte z toho, že existuje dvojica iracionálnych čísel a, b takých, že a^b je racionálne. Nájdite konkrétny príklad takej dvojice.

7. Existuje nespočítateľný systém $\mathcal{B}$ podmnožín $\mathbb{N}$ taký, že pre (rôzne) $A, B \in \mathcal{B}$ je prienik $A \cap B$ konečný?